ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΥΡΗΝΑΣ

η επιλογή των αριστούχων

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ"

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

A1. σελ. 133

A2. σελ. 51

A3. σελ. 185

A4.
α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Λάθος

Θέμα Β

B1.

$A_{fog}: \{ x \in A_g \ / \ g(x) \in A_f \} = (2, +\infty)$

$x \geq 2$

$\sqrt{x-2} + 1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} > 0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x-2}^{\,2} > 0^2 \Leftrightarrow$

$x > 2$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2}+1) = 2\ln(\sqrt{x-2}+1-1) =$
$2\ln\sqrt{x-2} = \ln(\sqrt{x-2})^2 = \ln(x-2)$, $x>2$

B2. $h(x) = \ln(x-2)$, $x \in (2,+\infty)$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $A=(2,+\infty)$ με $h'(x) = \frac{1}{x-2}\cdot(x-2)' = \frac{1}{x-2} > 0$

άρα $h \nearrow$, άρα h 1-1, άρα η h αντιστρέφεται
δηλαδή ορίζεται η συνάρτηση $h^{-1}: h(A) \to A$
Αφού h συνεχής και $\nearrow$ στο $A=(2,+\infty)$ το σύνολο τιμών της h (πεδίο ορισμού της h^{-1}) είναι:

$$h(A) = \left(\lim_{x\to 2^+} h(x), \lim_{x\to+\infty} h(x)\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$$

- $\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} \ln(x-2) = \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$
  $u = x-2$
  $x\to 2^+$, $u\to 0^+$

- $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x-2) = \lim_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$
  $u = x-2$
  $x\to+\infty$
  $u\to+\infty$

άρα $h^{-1}: \mathbb{R} \to (2,+\infty)$

Τύπος της h^{-1}: $y = h(x) \Leftrightarrow$
$y = \ln(x-2)$, $y\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$
$\ln e^y = \ln(x-2) \Leftrightarrow$
$e^y = x-2 \Leftrightarrow$
$x = e^y+2$, $y\in\mathbb{R}$

Άρα $h^{-1}(y) = e^y+2$, $y\in\mathbb{R}$
δηλαδή $y \leftrightarrow x$, $h^{-1}(x) = e^x+2$, $x\in\mathbb{R}$

B3. $\lim_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)=$

$-\infty\cdot 2=-\infty$

- $\lim_{x\to 2}h(x)=-\infty$

- $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

όπου $f(x)=2\ln(x-1)$ (παραγωγίσιμη)

$f'(x)=\frac{2}{x-1}\cdot(x-1)'=\frac{2}{x-1}$, $x>1$

άρα $f'(2)=\frac{2}{2-1}=2$

ΘΕΜΑ Γ

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}$

Γ1. Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ άρα: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\beta\in\mathbb{R}$

άρα $\kappa=0$ επειδή αν $\kappa\neq 0$ τότε:

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\kappa x=\kappa(+\infty)=\begin{cases}+\infty, & \kappa>0\\ -\infty, & \kappa<0\end{cases}$ άτοπο

Για $\kappa=0$ $\quad f(x)=\frac{\mu x}{x^2+1}$

- Η ευθεία $y=x$, εφάπτεται της C_f στο $(0,0)$ άρα $f(0)=0$ και $f'(0)=1$

όπου: $f'(x) = \left(\frac{\mu x}{x^2+1}\right)' = \frac{(\mu x)'(x^2+1) - \mu x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{\mu(x^2+1) - \mu x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2+1)^2} = \frac{\mu(1-x^2)}{(x^2+1)^2}, x \in \mathbb{R}$

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$ Άρα $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Γ2. I) Η $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$) με $f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	
			$\boxed{T.E}$		$\boxed{T.M}$		
			$f(-1) = -\frac{1}{2}$		$f(1) = \frac{1}{2}$		

Η $f(x)$ ↘ στο $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και $f(x)$ ↗ στο $[-1, 1]$. Στο $x_1 = -1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-1) = -\frac{1}{2}$ και στο $x_2 = 1$ τοπικό μέγιστο το $f(1) = \frac{1}{2}$

II) • Στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -1]$ η f είναι συνεχής και ↘ άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών $f(A_1) = [f(-1), \lim_{x \to -\infty} f(x)) =$

$[-\frac{1}{2}, 0)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = 0$

• Στο $A_2 = [-1, 1]$ η f είναι συνεχής και $\nearrow$ άρα
$f(A_2) = [f(-1), f(1)] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

• Στο $A_3 = [1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και $\searrow$ άρα
$f(A_3) = (\lim_{x \to +\infty} f(x), f(1)] = (0, \frac{1}{2}]$

Το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [-\frac{1}{2}, 0) \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup (0, \frac{1}{2}]$$
$$= [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

Η Εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + a^2$, $a \in \mathbb{R}$

• Αν $a \neq 0$ τότε $a^2 > 0$ και $\frac{1}{2} + a^2 \notin f(A)$
άρα για $a \neq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

• Αν $a = 0$ $\quad f(x) = \frac{1}{2}$
Αφού $\frac{1}{2} \notin f(A_1)$ άρα η $f(x) = \frac{1}{2}$ δεν έχει ρίζα στο $A_1 = (-\infty, -1]$

Αφού $\frac{1}{2} \in f(A_2)$ και $f \nearrow$ στο A_2 η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$
έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.

και $\forall x > 1 \overset{f \downarrow A_3}{\Longleftrightarrow} f(x) < f(1) \Rightarrow$
$f(x) < \frac{1}{2}$
άρα δεν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2}$ στο $(1, +\infty)$

Άρα η $f(x) = \frac{1}{2}$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.

Γ3.

I) $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx$

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}\,dx =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} + \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}\right)dx =$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{x^2+1}}\,dx = \int_0^1 x^{2\nu+1}\,dx -$$

$$\left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}$$

II) Για $\nu=0$ $\quad I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+1|\right]_0^1 =$

$$\frac{1}{2}\left(\ln 2 - \cancel{\ln 1}^{\,0}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$$

· Έχουμε $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$ ①, $\nu \in \mathbb{N}$

για $\nu=0$ $\quad I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2}$ ②

για $\nu=1$ $\quad I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \ln\sqrt{2}\right)$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \ln\sqrt{2}$$

$$= -\frac{1}{4} + \ln\sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο

- $0 < g(x) < 1$
- $g'(x) \neq -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Δ1. Θέτω: $h(x) = g(x) + x$, $x \in [-1, 0]$

- h συνεχής στο $[-1,0]$ ως άθροισμα των συνεχών $g(x), x$
- $\left.\begin{array}{l} h(-1) = g(-1) - 1 < 0 \\ h(0) = g(0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(-1) \cdot h(0) < 0$
- $0 < g(x) < 1 \overset{x=-1}{\Longrightarrow} 0 < g(-1) < 1 \Rightarrow g(-1) - 1 < 0$

  $\overset{x=0}{\Longrightarrow} g(0) > 0$

από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-1, 0)$: $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow$

$g(x_1) + x_1 = 0$

όμως $h(x)$ παραγωγίσιμη με $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ (αφού $g'(x) \neq -1$)
και $h'(x)$ συνεχής ως άθροισμα συνεχών : $g'(x)$, 1
άρα η $h'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$ οπότε στο $(-1,0)$ θα είναι γνησίως μονότονη. Και αφού για $-1 < 0$ ισχύει $h(-1) < 0 < h(0)$, η $h(x)$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Επομένως το $x_1 \in (-1,0)$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$ σε όλο το $\mathbb{R}$.

Δ2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot (g(x)+x) & , x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - kx & , x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad , k \in \mathbb{R}$$

Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $x=0$, επομένως ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = l \in \mathbb{R}, \text{ όπου:}$$

• $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-\cancel{f(0)}^{\,0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2\cdot(g(x)+x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} x\cdot(g(x)+x) =$

$= 0 \cdot g(0) = 0$

• $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-\cancel{f(0)}^{\,0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - kx}{x} \overset{(\frac{0}{0})}{\underset{DLH}{=}}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - k = 2\cdot\sigma\upsilon\nu 0 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 0} - k = 3-k$

άρα $3-k=0 \Leftrightarrow k=3$

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x)+x) & , x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x & , x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Δ3.

$$f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x \quad , x \in [0, \tfrac{\pi}{2})$$

(Ι) η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2})$ με:

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) - (\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)\cdot 2(\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2})}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{2\cdot(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2(\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2})}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0, \quad \forall x \in (0,\tfrac{\pi}{2})$$

και αφού f συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2})$ (ως παραγωγίσιμη), ισχύει f γνήσια αύξουσα στο $[0,\frac{\pi}{2})$.
Επομένως $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2})$ δηλαδή $0 \le x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
$f(0) \le f(x) \Rightarrow f(x) \geq 0$

(ΙΙ) Εξίσωση $3f(x) = \pi \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$, $x \in [0,\frac{\pi}{2})$

f συνεχής και $\nearrow$ στο διάστημα $\Delta: [0,\frac{\pi}{2})$ άρα το αντίστοιχο σύνολο τιμών της f είναι το:

$$f(\Delta) = [f(0), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)) = [0,+\infty)$$

• $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = 2\cdot\eta\mu\frac{\pi}{2} + (+\infty) - 3\frac{\pi}{2} = +\infty$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} εφx = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(ημx \cdot \frac{1}{συνx} \right) = ημ\frac{\pi}{2} \cdot (+\infty) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$$

αφού: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} συνx = συν\frac{\pi}{2} = 0$ και για $x \to \frac{\pi}{2}^-$ είναι

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$ όπου $συνx > 0$, άρα $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{συνx} = +\infty$

Αφού $\frac{\pi}{3} \in f(\Delta) = [0, +\infty)$ και $f \nearrow$ στο Δ, υπάρχει

μοναδικό $x_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$ ώστε $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$.
($x_2 \neq 0$ αφού $f(0) \neq \frac{\pi}{3}$)

Δ4.

(I) $f(x) = x^2 (g(x) + x) = x^2 \cdot h(x)$, $x \in [x_1, 0)$

$\forall x \in [x_1, 0)$ δηλαδή

$$x_1 \leq x < 0 \xRightarrow{h \nearrow \text{ (από Δ1)}}$$
$$h(x_1) \leq h(x) < h(0) \Rightarrow$$
$$0 \leq h(x) \xRightarrow{x^2 > 0}$$
$$0 \leq x^2 \cdot h(x) \Rightarrow$$
$$f(x) \geq 0, \ \forall x \in [x_1, 0)$$

και αφού για $x = 0$ είναι $f(0) = 2ημ0 + εφ0 - 3 \cdot 0 = 0$,
ισχύει $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [x_1, 0]$

(II) $f(x) = \frac{\pi}{3}$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο πεδίο ορισμού της, άρα το εμβαδόν του χωρίου $\underline{Ω}$ είναι:

$$E = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)|\,dx = \int_{x_1}^{0} |f(x)|\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)|\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = E_1 + E_2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \geq 0,\ \forall x \in [x_1, 0]\ (\Delta 4(i)) \\ f(x) \geq 0,\ \forall x \in [0, \frac{\pi}{3}]\ (\Delta 3(i)) \end{array}}$$

όπου δίνεται: $E_1 = E_2$

- $$E_1 = \int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{0} x^2 (g(x) + x)\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{0} x^2 \cdot g(x)\,dx + \int_{x_1}^{0} x^3\,dx = \int_{x_1}^{0} \left(\frac{x^3}{3}\right)' g(x)\,dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \cdot g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x)\,dx + 0 - \frac{x_1^4}{4} =$$

$$= 0 - \frac{x_1^3}{3} \underbrace{g(x_1)}_{-x_1} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx - \frac{x_1^4}{4} =$$

$$= \overset{4}{\frac{x_1^4}{3}} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^{0} x^3 \cdot g'(x)\,dx - \overset{3}{\frac{x_1^4}{4}} = \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^{0} x^3 \cdot g'(x)\,dx$$

• $E_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)\,dx =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2\eta\mu x + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - 3x\right) dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln|\sigma\upsilon\nu x| - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$

$= \left(-2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \ln\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right) - 3\cdot\frac{\pi^2}{18}\right) - \left(-2\sigma\upsilon\nu 0 - \cancel{\ln 1}^{\,0} - 0\right) =$

$= -\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} - \ln\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$

Αφού $E_1 = E_2 \Longleftrightarrow$

$\frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 \cdot g'(x)\,dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \overset{\cdot 3}{\Longleftrightarrow}$

$\frac{x_1^4}{4} - \int_{x_1}^{0} x^3 \cdot g'(x)\,dx = 3 + 3\ln 2 - \frac{\pi^2}{2} \Longleftrightarrow$

$\int_{x_1}^{0} x^3 \cdot g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ

ΜΑΡΚΑΤΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ

ΑΝΝΙΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

ΚΑΛΑΜΠΑΛΙΚΗ ΜΑΡΙΑ