ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΥΡΗΝΑΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

A_1 Σχολικό σελ. 93

A_2 Ορισμός σχολικό σελ. 16.

A_3. α) Λάθος, β) Σωστό γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Λάθος

A_4. α) $(c)'=0$ β) $(x^2)'=2x$.

ΘΕΜΑ Β. B_1.

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$x_i v_i$
0	10	20	10	0
1	15	30	25	15
2	11	22	36	22
3	8	16	44	24
4	6	12	50	24
Σύνολο	50	100		85

$v_1 = 50 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 \Rightarrow v_1 = 50 - 15 - 11 - 8 - 6 = 10$

$f_1\% = \frac{10}{\cancel{50}}\cdot \overset{2}{\cancel{100}} = 20$, $f_2\% = \frac{15}{\cancel{50}}\cdot \overset{2}{\cancel{100}} = 30$, $f_3\% = 22$, $f_4\% = 16$, $f_5\% = 12$.

$N_1 = v_1$, $N_2 = N_1 + v_2$, $N_3 = N_2 + v_3$, $N_4 = N_3 + v_4$, $N_5 = 50$

B_2. $\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i v_i}{v} = \frac{85}{50} = \frac{17}{10} = 1{,}7$

Β3 Οι παρατηρήσεις διατάσσονται ως εξής:

$0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2, 3, 3, \ldots, 4, 4, \ldots, 4.$

$\underset{25^{\eta}}{1}$, $\underset{26^{\eta}}{2}$

Εφόσον το πλήθος είναι άρτιο η διάμεσος δ ισούται με το ημιάθροισμα της $25^{\eta\varsigma}$ και $26^{\eta\varsigma}$ παρατήρησης.

Οπότε $\delta = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2} = 1,5$.

Β4 α) Το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται το πολύ 3 ώρες είναι: $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 88\%$.

β) Αν η κάθε παρατήρηση x_i αυξηθεί κατά $c=4$ τότε οι νέες παρατηρήσεις y_i θα είναι $y_i = x_i + 4$,

Τότε η νέα μέση τιμή $\bar{y} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 = 5,7$.

ΘΕΜΑ Γ.

$f(x) = -2x^3 + 6x^2 + \alpha, \quad x \in \mathbb{R}$

Γ1. $f'(x) = (-2x^3 + 6x^2 + \alpha)' = -6x^2 + 12x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow 6x(-x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	Τ.Ε	$\nearrow$	Τ.Μ	$\searrow$	

$f \downarrow (-\infty, 0], [2, +\infty)$

$f \uparrow [0, 2]$

$f(0) = \alpha \quad f(2) = \alpha + 8$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΥΡΗΝΑΣ

Γ2. Από Γ1 η f παρουσιάζει στο $x_1=0$ τοπ. ελάχιστο το $f(0)=\alpha$ κ' στο $x_2=2$ παρουσιάζει τοπ. μέγιστο το $f(2)=\alpha+8$.

Έχουμε ότι: $\frac{f(0)+f(2)}{2}=-8 \Leftrightarrow \frac{\alpha+\alpha+8}{2}=-8 \Leftrightarrow 2\alpha+8=-16 \Leftrightarrow$

$2\alpha=-24 \Leftrightarrow \alpha=-12$.

Γ3. Για $\alpha=-12$ $f(x)=-2x^3+6x^2-12$, $f'(x)=-6x^2+12x$.

Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο $M(1,f(1))$ δηλ. $M(1,-8)$ είναι: $y=\lambda x+\beta$ (1) $\quad \lambda=f'(1)=6$.

Το $M(1,-8)$ επαληθεύει την (1): $-8=6\cdot 1+\beta \Rightarrow \beta=-14$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(1,-8)$ είναι: $y=6x-14$.

Γ4. $f(x)=-2x^3+6x^2-12$, $x\in\mathbb{R}$ από το Γ1, Γ2 στο $[2,+\infty)$ $f\downarrow$

$\forall x\geq 2 \Rightarrow f(x)\leq f(2) \Leftrightarrow -2x^3+6x^2-12\leq -4 \overset{:(-2)}{\Leftrightarrow}$ $\quad f(2)=-4$

$x^3-3x^2+6\geq 2 \Leftrightarrow$

$x^3-3x^2+4\geq 0$.

ΘΕΜΑ Δ

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\lambda x^2+7x+\frac{2}{3}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Δ1. Έχουμε: $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0 \Leftrightarrow f'(1)=0 \Leftrightarrow 1^2+2\lambda\cdot 1+7=0 \Leftrightarrow$

$2\lambda+8=0 \Leftrightarrow 2\lambda=-8 \Leftrightarrow$

$\lambda=-4$.

$$\boxed{f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3+\lambda x^2+7x+\frac{2}{3}\right)'= \cancel{\frac{1}{3}}\cancel{3}x^2+2\lambda x+7=x^2+2\lambda x+7}$$

Δ2. Για $\lambda=-4$ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+7x+\frac{2}{3}$, $f'(x)=x^2-8x+7$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-8x+7=0$ $\Delta=36$ $x_1=1,\ x_2=7$.

x	$-\infty$	1		7	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f \uparrow (-\infty,1],\ [7,+\infty)$

$f \downarrow [1,7]$

Δ3. $2020,\ 2025 \in (7,+\infty)$ όπου $f\uparrow$ οπότε:

$2025>2020 \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} f(2025)>f(2020) \Rightarrow$

$f(2025)-f(2020)>0$ $\quad(1)$

$\frac{3}{2},\ \frac{5}{2} \in (1,7)$ όπου $f\downarrow$ οπότε:

$\frac{3}{2}<\frac{5}{2} \overset{f\downarrow}{\Longrightarrow} f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)-f\left(\frac{5}{2}\right)>0$ $\quad(2)$

Η παράσταση $A=\dfrac{f(2025)-f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right)-f\left(\frac{5}{2}\right)}>0$ από (1), (2)

Δ4. $f'(x)=x^2-8x+7$ και $f''(x)=(x^2-8x+7)'=2x-8$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)-f''(x)+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-8x+7-2x+8+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-10x+16}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{3})(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}=$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΥΡΗΝΑΣ

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{3})^2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-8)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{\cancel{x-2}}=$$

$$\lim_{x\to 2}\left[(x-8)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})\right]=-6\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{3})=-12\cdot\sqrt{3}.$$

Επιμέλεια

Μαρκάτου Γεωργία

Μαρκάτος Διονύσης

Μαστοράκος Παναγιώτης

Αννινος Δημήτρης