ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΥΡΗΝΑΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ"

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

A_1. Απόδειξη σχολ. βιβλίο σελ. 186.

A_2. Σχολικό βιβλίο σελ. 76.

A_3. Ορισμός σχ. βιβλίο σελ. 161.

A_4. α) Σωστό, β) Σωστό, γ) Λάθος, δ) Λάθος, ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B_1. $f(x)=x^3+\alpha x^2+9x-3$, $x\in\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη κ' συνεχής με $f'(x)=3x^2+2\alpha x+9$

Αφού στο $x_0=1$ η f παρουσιάζει τοπ. ακρότατο από Θ. Fermat έχουμε:

$f'(1)=0 \Leftrightarrow 3+2\alpha+9=0 \Leftrightarrow \alpha=-6$.

B_2. Για $\alpha=-6$ $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$ κ' $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3\cdot(x^2-4x+3)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.Μ		Τ.Ε		

$f(1)=1$ $f(3)=-3$

Στο $A_1=[0,1]$ $f\nearrow$ κ' συνεχής οπότε: $f(A_1)=[f(0), f(1))=[-3,1]$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-6x^2+9x-3)=\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty.$$

Στο $A_2=[1,3]$ $f\searrow$ κ' συνεχής οπότε: $f(A_2)=[f(3), f(1)]=[-3,1]$

Στο $A_3=[3,+\infty)$ $f\nearrow$ κ' συνεχής οπότε: $f(A_3)=[f(3), \lim_{x\to+\infty}f(x))=[-3,+\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-6x^2+9x-3)=\lim_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$$

Αφού $0\in f(A_1)$, $0\in f(A_2)$, $0\in f(A_3)$ υπάρχουν:

$x_1\in(0,1)$ μοναδικός ($f\nearrow$): $f(x_1)=0$

$x_2\in(1,3)$ μοναδικός ($f\searrow$): $f(x_2)=0$

$x_3\in(3,+\infty)$ μοναδικός ($f\nearrow$): $f(x_3)=0$.

Αφού f πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού η εξίσωση $f(x)=0$ σύμφωνα με τα παραπάνω έχει ακριβώς τρεις διακεκριμένες πραγματικές ρίζες.

B3. f' παραγωγίσιμη κι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=(3x^2-12x+9)'=6x-12$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x>2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\boxed{\Sigma K}$	$\cup$

$f(2)=-1$

f κοίλη στο $(-\infty, 2]$

f κυρτή στο $[2, +\infty)$

στο $x_0=2$ παρουσιάζει καμπή με $f(2)=-1$.

B4. $g(x)=x+f(x)$ παραγωγίσιμη κι συνεχής

με $g'(x)=1+f'(x)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ είναι:

$\varepsilon_1: y-f(\xi)=f'(\xi)\cdot(x-\xi)$ (1)

Από (1) $\overset{x=0}{\Rightarrow}$ $y-f(\xi)=-\xi f'(\xi) \rightarrow y=f(\xi)-\xi f'(\xi)$.

Η (ε_1) τέμνει τον $y'y$ στο $(0, f(\xi)-\xi f'(\xi))$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $B(\xi, g(\xi))$ είναι:

$\varepsilon_2: y-g(\xi)=g'(\xi)\cdot(x-\xi)$ (2)

Από (2) $\overset{x=0}{\Rightarrow}$ $y-(\xi+f(\xi))=(1+f'(\xi))(-\xi) \Rightarrow$

$y=\cancel{-\xi}-\xi f'(\xi)+\cancel{\xi}+f(\xi) \rightarrow y=f(\xi)-\xi f'(\xi)$.

Η (ε_2) τέμνει τον $y'y$ στο $(0, f(\xi)-\xi f'(\xi))$

Άρα οι εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) τέμνονται πάνω στον $y'y$ στο $(0, f(\xi)-\xi f'(\xi))$

ΘΕΜΑ Γ.

$$f(x)=\begin{cases} e^x \cdot \eta\mu x &, x<0 \\ \sqrt{x^2+x} &, x\geq 0 \end{cases}$$

Γ1.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (e^x \eta\mu x) = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x^2+x}\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Άρα f συνεχής στο $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x}\right) = e^0 \cdot 1 = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} \overset{x>0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = +\infty.$$

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Γ2. Αφού f συνεχής στο $A_f=\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\cdot \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (e^x \eta\mu x) = 0$

$$\boxed{|\eta\mu x|\leq 1 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} |e^x \cdot \eta\mu x| \leq e^x \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \eta\mu x \leq e^x, \quad \lim_{x\to -\infty} e^x = \lim_{x\to -\infty}(-e^x) = 0 \Rightarrow \text{Κριτήριο Παρεμβολής} \ \lim_{x\to -\infty}(e^x \eta\mu x) = 0}$$

Η ευθεία $y=0$ ($x'x$ άξονας) οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} \overset{x>0}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = 1 = \lambda.$$

$$\lim_{x\to +\infty} (f(x)-\lambda x) \overset{\lambda=1}{=} \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} \overset{x>0}{=}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Γ3. Θεωρώ την εξίσωση $f(x)=x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x)-x-\frac{1}{2}=0$

Θέτω $g(x)=f(x)-x-\frac{1}{2}$, $x\in[-\pi,0]$

g συνεχής στο $[-\pi,0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων: $f(x)$, $-x-\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} g(-\pi) &= e^{-\pi}\cdot\eta\mu(-\pi)-\pi-\frac{1}{2}=\pi-\frac{1}{2}>0 \\ g(0) &= f(0)-0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g(-\pi)\cdot g(0)<0.$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-\pi,0)$: $g(\xi)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(\xi)=\xi+\frac{1}{2}$. Δηλ. η C_f τέμνει την $y=x+\frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi\in(-\pi,0)$

Γ4. $x=x(t)$, $y=y(t)$ με $y=\sqrt{x^2+x}$, $x>0$.

Έχουμε $y(t)=\sqrt{x^2(t)+x(t)}$ παραγωγίζω τα δύο μέλη.

$$y'(t)=\left(\sqrt{x^2(t)+x(t)}\right)' \Leftrightarrow y'(t)=\frac{2x(t)x'(t)+x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} \Leftrightarrow y'(t)=\frac{x'(t)\left(2x(t)+1\right)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} \quad (1)$$

Έστω ότι για $t=t_0\geq 0$ έχουμε $y'(t_0)=x'(t_0)$

Από (1) έχουμε: $\cancel{y'(t_0)}=\frac{\cancel{x'(t_0)}\left(2x(t_0)+1\right)}{2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}=2x(t_0)+1 \Leftrightarrow$

$$\left(2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}\right)^2=\left(2x(t_0)+1\right)^2 \Leftrightarrow \cancel{4x^2(t_0)}+\cancel{4x(t_0)}=\cancel{4x^2(t_0)}+\cancel{4x(t_0)}+1 \Leftrightarrow 0=1$$

Άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0\geq 0$ ώστε $x'(t_0)=y'(t_0)$

ΘΕΜΑ Δ.

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $F'(x)=f(x)$ $\forall x>0$

$x\cdot f(x)=2F(x)\cdot \ln x,\ x>0$ (1) κ' $f'(1)=2$ άρα η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην $y=2x$

Δ1. $g(x)=\dfrac{F(x)}{x^{\ln x}}$, $x>0$ παραγωγίσιμη κ' συνεχής με $g'(x)=\left(\dfrac{F(x)}{x^{\ln x}}\right)'=$

$$\boxed{x^{\ln x}=e^{\ln^2 x}}$$

$$\boxed{\left(e^{\ln^2 x}\right)'=e^{\ln^2 x}\cdot(\ln^2 x)' = x^{\ln x}\cdot\frac{2\ln x}{x}}$$

$$=\frac{F'(x)\cdot x^{\ln x}-\left(e^{\ln^2 x}\right)'\cdot F(x)}{(x^{\ln x})^2}=\frac{f(x)\cdot x^{\ln x}-x^{\ln x}\cdot\frac{2\ln x}{x}\cdot F(x)}{(x^{\ln x})^2}=$$

$$=\frac{\cancel{x^{\ln x}}\left(x\cdot f(x)-2F(x)\ln x\right)}{x\cdot(x^{\ln x})^2}=0 \text{ από (1)}$$

Άρα $g(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$

Δ2. 1) Από (1) $\xRightarrow{x=1}$ $f(1)=0$.

Από (1) $f(x)=\dfrac{2F(x)\cdot\ln x}{x}$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\left(\frac{2F(x)\ln x}{x}\right)'=\frac{(2F(x)\ln x)'\cdot x-2F(x)\ln x\,(x)'}{x^2}=$$

$$=\frac{\left(2F'(x)\cdot\ln x+2F(x)\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot x-2F(x)\cdot\ln x}{x^2}=\frac{2x\,f(x)\ln x+2F(x)-2F(x)\ln x}{x^2}$$

Είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων: x, $\ln x$, $f(x)$, $F(x)$, x^2.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}}=f'(1)=2 \quad \left(f' \text{ συνεχής άρα } \lim_{x\to1}f'(x)=f'(1)\right)$$

Επίσης έχουμε: $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln x}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to1}\frac{2F(x)}{x}=2F(1)$, F συνεχής ως παραγωγίσιμη.

Οπότε: $2F(1)=2\Leftrightarrow F(1)=1$.

$\forall x>0$ έχουμε $g(x)=c \xRightarrow{x=1} g(1)=c \Rightarrow F(1)=c\Rightarrow c=1$.

$\forall x>0$ $\dfrac{F(x)}{x^{\ln x}}=1 \Leftrightarrow F(x)=x^{\ln x}$

Δ3. $F'(x)=\left(x^{\ln x}\right)'=\left(e^{\ln^2 x}\right)'=e^{\ln^2 x}\cdot\dfrac{2\ln x}{x}=x^{\ln x}\cdot\dfrac{2\ln x}{x}$

$F'(x)=0 \Leftrightarrow x^{\ln x}\cdot\dfrac{2\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1.$ $\quad x^{\ln x}>0 \quad \forall x>0.$

$F'(x)>0 \Leftrightarrow x^{\ln x}\cdot\dfrac{2\ln x}{x}>0 \Leftrightarrow \ln x>0 \Leftrightarrow x>1$

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	$\boxed{\text{ΟΕ}}$ $F(1)=1$	$\nearrow$

$F \downarrow$ στο $(0,1]$, $F \uparrow [1,+\infty)$
στο $x_0=1$ παρουσιάζει ολ. ελάχιστο το $F(1)=1$

Η εξίσωση $F(x^2)=F(x)-(x-1)^2 \Leftrightarrow F(x^2)-F(x)+(x-1)^2=0$
έχει προφανή ρίζα $x=1$. $\qquad$ Θέτω $h(x)=F(x^2)-F(x)+(x-1)^2,\ x>0$

Θέτω $g(x)=x^2-x=x\cdot(x-1)$ με

• Για $0<x<1 \Rightarrow x\cdot(x-1)<0 \Leftrightarrow x^2<x \xRightarrow{F\downarrow} F(x^2)>F(x) \Rightarrow F(x^2)-F(x)>0$

Άρα $h(x)=F(x^2)-F(x)+(x-1)^2>0$ $\qquad (x-1)^2>0$

• Για $x>1 \Rightarrow x\cdot(x-1)>0 \Leftrightarrow x^2>x \xRightarrow{F\uparrow} F(x^2)>F(x) \Rightarrow F(x^2)-F(x)>0$

Άρα $h(x)=F(x^2)-F(x)+(x-1)^2>0$

Άρα $\forall x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ $h(x)>0$. Επομένως η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική.

Δ4. F συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως παραγωγίσιμη οπότε:

$$E=\int_1^e |F(x)|dx=\int_1^e F(x)dx=\int_1^e e^{\ln^2 x}dx$$

Από Δ3 $\forall x>0$ $F(x)\geq 1$

Για κάθε $x\in[1,e]\subseteq(0,+\infty)$ ισχύει: $\ln x\leq x-1$ $\quad$ Το $=$ ισχύει μόνο για $x=1$

Θέτω όπου x το $e^{\ln^2 x}$ άρα $\ln^2 x\leq e^{\ln^2 x}-1 \Leftrightarrow e^{\ln^2 x}\geq \ln^2 x+1.$

Αφού $e^{\ln^2 x}$, $\ln^2 x+1$ συνεχείς στο $[1,e]$ θα ισχύει:

$$\int_1^e e^{\ln^2 x}\,dx > \int_1^e (\ln^2 x+1)\,dx = \int_1^e \ln^2 x\,dx + \int_1^e 1\,dx = \int_1^e (x)'\ln^2 x\,dx + e-1 =$$

$$= \left[x\ln^2 x\right]_1^e - \int_1^e \cancel{x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx + e-1 = e - 2\int_1^e (x)'\ln x\,dx + e-1 =$$

$$= 2e-1-2\left[x\cdot\ln x\right]_1^e + 2\int_1^e \cancel{x}\,\frac{1}{\cancel{x}}\,dx = \cancel{2e}-1-\cancel{2e}+2(e-1) = 2e-3.$$

Άρα $\mathcal{E}=\int_1^e e^{\ln^2 x}\,dx > 2e-3$.

Επιμέλεια.

Μαστοράκος Παναγιώτης
Μαρμάτος Διονύσης
Μαρμάτου Γεωργία.
Άννινος Δημήτρης.