ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ- ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΑΒΒΑΤΟ 1 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

A_1. Σχολικό βιβλίο σελ. 31.

A_2 α) Σχολικό βιβλίο σελ. 65 (πάνω μέρος σελίδας)

β) Σχολικό βιβλίο σελ. 87 (πάνω μέρος σελίδας).

A_3. α) Λάθος, β) Λάθος, γ) Σωστό, δ) Σωστό

ΘΕΜΑ Β.

B_1. Δίνεται $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}$, $x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}\right)'=\frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}x^2-6x+5=x^2-6x+5.$$

B_2. $f'(x)=x^2-6\cdot x+5$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0$ $\quad \Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot5=16$ ρίζες $x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{6+4}{2}=5 \\ x_2=\frac{6-4}{2}=1. \end{cases}$$

x	$-\infty$	1		5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗
		$\boxed{T.M}$ $f(1)$		$\boxed{T.E}$ $f(5)$	

Η f είναι γν. αύξουσα στα $(-\infty,1]$, $[5,+\infty)$ και γν. φθίνουσα στο $[1,5]$.

Η f παρουσιάζει στο $x_1=1$ τοπ. μέγιστο το $f(1)=\frac{8}{3}$ και στο $x_2=5$ τοπ. ελάχιστο το $f(5)=-8$.

B_3. Η εφαπτόμενη είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$ (1)

Για $x=0$ $f(0)=\frac{1}{3}$. Το σημείο $M\left(0,\frac{1}{3}\right)$ επαληθεύει την (1) οπότε: $\frac{1}{3} = \lambda \cdot 0 + \beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{3}$.

Επίσης ισχύει: $\lambda = f'(0) = 5$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x=0$ είναι: $y = 5x + \frac{1}{3}$.

B4. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) = (-1)^2 - 6\cdot(-1) + 5 = 12$.

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. $s = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+6x-7}{2x-2} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-7)}{2\cancel{(x-1)}} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x+7}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$.

$x^2+6x-7=0 \quad \Delta = 6^2 - 4\cdot(-7) = 64$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2\cdot 1}$ → $x_1 = \frac{-6+8}{2} = 1$, $x_2 = \frac{-6-8}{2} = -7$

Το τριώνυμο γίνεται: $x^2+6x-7 = (x-1)\cdot(x+7)$.

Γ2. Γνωρίζουμε ότι: $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \overset{CV=20\%}{\Leftrightarrow} \frac{20}{100} = \frac{4}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow 20|\bar{x}| = 400 \Leftrightarrow |\bar{x}| = \frac{400}{20} \Leftrightarrow \bar{x} = \pm 20$

Για την συγκεκριμένη κατανομή θερμοκρασιών δεκτή γίνεται μόνο η $\bar{x} = 20$.

Γ3. Έχουμε $\bar{x} = 20 \Leftrightarrow \frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5} = 20 \Leftrightarrow 90+\kappa = 100 \Leftrightarrow \kappa = 100-90 \Leftrightarrow \kappa = 10$.

Γ4. Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις: 22, 18, 30, 14, 16 (αφού $\kappa=10$) από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τιμή: 14, 16, 18, 22, 30 και αφού το πλήθος τους είναι περιττός αριθμός η μεσαία παρατήρηση είναι η διάμεσος: $\delta = 18$.

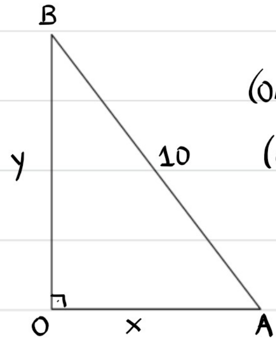
Γ4. Οι νέες τιμές θερμοκρασίας αυξήθηκαν κατά 10% οπότε για τις νέες θερμοκρασίες y_i θα ισχύει: $y_i = x_i + \frac{10}{100}x_i \Leftrightarrow y_i = 1{,}1 \cdot x_i$.

Οπότε η νέα μέση τιμή θα είναι $\bar{y} = 1{,}1\cdot\bar{x}$, $\bar{x} > 0$.

και η νέα τυπική απόκλιση $s_y = 1{,}1\cdot s_x$. Οπότε ο νέος συντελεστής μεταβολής των θερμοκρασιών θα είναι $CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{\cancel{1{,}1}\cdot s_x}{\cancel{1{,}1}\cdot\bar{x}} = \frac{s_x}{\bar{x}} = CV_x = 20\%$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{O}B$ οπότε:



$(OA)=x$

$(OB)=y$

$(AB)=10$

$\hat{O}=90$

$$(OB)^2=(AB)^2-(OA)^2 \Leftrightarrow y^2=10^2-x^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{100-x^2}$$

- Έχουμε: $x>0, y>0$ (ως πλευρές τριγώνου)

και $100-x^2>0$ ρίζες: $x=\pm 10$

$-\infty$	-10		10	$+\infty$
$-$	0	$+$	0	$-$

Από τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου έχουμε: $-10<x<10$

Οπότε προκύπτει ότι: $x\in(0,10)$.

Η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{100-x^2}$ έχει πεδίο ορισμού $A_f=(0,10)$

Δ2. Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x είναι:

$$f'(x)=\left(\sqrt{100-x^2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{100-x^2}}\cdot(100-x^2)'=\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{100-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}$$

Για $x=8$ έχουμε: $f'(8)=\dfrac{-8}{\sqrt{100-8^2}}=\dfrac{-8}{\sqrt{36}}=-\dfrac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{6}_{3}}=-\dfrac{4}{3}$

Δ3. Παρατηρούμε ότι: $f(6)=\sqrt{100-6^2}=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8$

Οπότε: $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-8}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}=f'(6)=\dfrac{-6}{\sqrt{100-6^2}}=\dfrac{-6}{\sqrt{64}}=\dfrac{-\cancel{6}^{3}}{\cancel{8}_{4}}=-\dfrac{3}{4}$

Δ4. Από $Δ_2$ έχουμε $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{100-x^2}}<0$ για κάθε $x\in(0,10)$.

Άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $A_f=(0,10)$.

Αφού $x_1=2{,}3<x_3=2{,}8<x_2=3{,}5$ με $x_1,x_2,x_3\in(0,10)$

θα ισχύει ότι: $f(x_1)>f(x_3)>f(x_2)$. αποδείχθηκε.

Επιμέλεια: Μαρκάτος Διονύσης
Μαστροράκος Παναγιώτης
Μαρκάτου Γεωργία
Αννινος Δημήτρης