ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη θεωρήματος σχολικό βιβλίο σελ. 111

Α2. Ορισμός σχολικό βιβλίο σελ. 104

Α3. Διατύπωση Θ. Rolle και γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος σχολικό βιβλίο σελ. 128

Α4.
α. ΛΑΘΟΣ
β. ΛΑΘΟΣ
γ. ΛΑΘΟΣ
δ. ΣΩΣΤΟ
ε. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Συναρτήσεις $g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}$, πεδίο ορισμού $A_g = R$

$h(x) = lnx$, πεδίο ορισμού $A_h = (0, +\infty)$

Β1.
Συνάρτηση $f = goh$
• Πεδίο ορισμού

$$A_f = A_{goh} = \{x \in A_h \;\; και \;\; h(x) \in A_g\} = \left\{ \begin{matrix} x \in (0,+\infty) \;\; και \;\; lnx \in R \\ ισχύει \\ \forall x > 0 \end{matrix} \right\} = (0, +\infty)$$

• Τύπος $\rightarrow f(x) = (goh)(x) = g\big(h(x)\big) = g(lnx) = \frac{4 - e^{2lnx}}{e^{lnx}} = \frac{4 - e^{lnx^2}}{x} = \frac{4 - x^2}{x}$, $x > 0$

Β2.

i. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $(0, +\infty)$

με $f'(x) = \frac{(4-x^2)' x - (4-x^2)(x)'}{x^2} = \frac{-2x \cdot x - (4 - x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} =$

$= \frac{-(x^2+4)}{x^2} < 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Άρα η f είναι γνήσια φθίνουσα.

ii. Αφού $\pi > e \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(\pi) < f\,(e) \Leftrightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e} \xLeftrightarrow{\cdot\frac{\pi}{4-e^2}<0} \frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}$

B3.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[(4-x^2)\frac{1}{x}\right] = 4\cdot(+\infty) = +\infty$

  Άρα η ευθεία $x = 0$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{x^2}\right) = -1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(-1)x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-x^2+x^2}{x}$

  $= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0$

  Άρα η ευθεία $y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)} = 0$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0$ επειδή:

Για κάθε $x > 0$ ισχύει $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)|}{|f(x)|} \le \frac{1}{|f(x)|}$

Δηλαδή $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\right| \le \frac{1}{|f(x)|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|} \le \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \le \frac{1}{|f(x)|}$ **(1)**

Όπου $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|f(x)|}\right) = 0$

Άρα από τη σχέση **(1)** και το κριτήριο παρεμβολής ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in [2,3]$ είναι $f(x) = \frac{1}{x} + a$

Δίνεται $\int_2^3 xf(x)dx = 1$, *όπου*

$\int_2^3 xf(x)dx = \int_2^3 x(\frac{1}{x}+a)dx = \int_2^3(1+ax)dx =$

$\left[x+\frac{ax^2}{2}\right]_2^3 = 3+\frac{9a}{2}-2-2a = 1+\frac{5a}{2}$

Άρα $1+\frac{5a}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{5a}{2} = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Γ2.

i. Αρκεί να δείξω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$,

όπου $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3\,, & x < 1 \\ \frac{1}{x}\,, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x^2 - 3x + 3) - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x^2 - 3x + 2)}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (x - 2) = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1 - x}{x}}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1 - x}{x(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1$$

Αφού

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$$

ισχύει

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1 \in R \ \ \textit{άρα η } f \textit{ είναι παραγωγίσιμη στο}$$

$$x_0 = 1 \ \textit{με} \ f'(1) = -1$$

Άρα ορίζεται η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της (1,f(1)) .

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon)\!: \ y = -x + 2$$

Η εφαπτομένη (ε) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω και ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\omega = \lambda\varepsilon = f'(1) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\omega = -1 \Leftrightarrow$$

$$\omega = \pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\omega = \frac{3\pi}{4}\,\text{rad}$$

Γ3.

- Για $x < 1$ η $f(x) = x^2 - 3x + 3$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με $f'(x) = 2x - 3$
- Για $x = 1$ είναι $f'(1) = -1$
- Για $x > 1$ η $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με $f'(1) = -\frac{1}{x^2}$

Άρα $f'(x) = \begin{cases} 2x-3 \ , & x<1 \\ -1 \ , & x=1 \\ -\frac{1}{x^2} \ , & x>1 \end{cases}$

- Για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ είναι $f'(x) = 2x - 3 < 0$
- $f'(1) = -1 < 0$
- Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

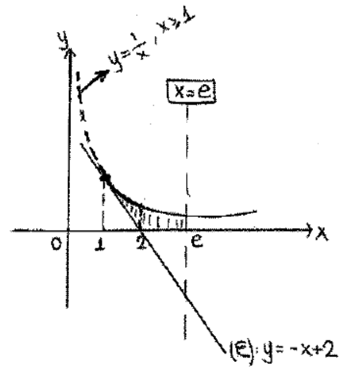
Άρα $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in R$ άρα η f είναι γνήσια φθίνουσα στο R , $άρα\ η\ f\ είναι\ 1 - 1.$

Αφού η f είναι συνεχής και ↘ στο R, το σύνολο τιμών της f είναι το :

$$f(R) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0, +\infty)$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

Γ4.



Η ευθεία $y = -x + 2$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο (2,0) αφού για $y = 0$ είναι $x = 2$.

Οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$ και $h(x) = -x + 2$ είναι συνεχείς (ως παραγωγίσιμες).

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - (-x+2)\right)dx + \int_2^e \frac{1}{x}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2\right)dx + \int_2^e \frac{1}{x}dx =$$

$$\left[ln|x| + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 + [ln|x|]_2^e = \cancel{ln2} + \cancel{2} - \cancel{4} - \underbrace{ln1}_{0} - \frac{1}{2} + \cancel{2} + \underbrace{lne}_{1} - \cancel{ln2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ \ τ.μ.$$

ΘΕΜΑ Δ

Συνάρτηση $f\,:\,(0,2) \to R \; με \; f(x) = ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa, \quad \kappa \in R$

Δ1. Δίνεται ότι ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1} = \ell \in R$

Θεωρώ συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{f(x)-2x}{x-1}, \quad x \in (0,2) \; με \; x \neq 1$

Άρα ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x) = \ell \in R$
- $f(x) = \varphi(x)(x-1) + 2x$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (\varphi(x)(x-1) + 2x)) = \ell \cdot (1-1) + 2 = 2$

Και αφού η f είναι συνεχής στο $(0,2)$ (ως παραγωγίσιμη) ισχύει $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

Όπου $f(1) = ln1 - 1 + \kappa = -1 + \kappa$

Άρα $-1 + \kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = 3$

Επομένως $f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3, \;\; x \in (0,2)$

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $Α = (0,2)$ με

$f'(x) = \frac{1}{2-x}(2-x)' + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}$, $x \in (0,2)$ όπου $x^2 > 0$,

$x - 2 < 0$ για κάθε $x \in (0,2)$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 1\,, \; ΔΕΚΤΟ \\ -2\,, \; ΑΠΟΡ \end{cases}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow$ -2 $< x < 1$ δηλαδή $0 < x < 1$

x	0		1		2
f '		+	0	−	
f		↗		↘	

ΟΛ. ΜΕΓ.

$\boxed{f(1)=2}$

Η f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνήσια φθίνουσα στο $[1,2)$. Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x = 1$ το $f(1) = 2$.

- Στο διάστημα $A_1 = (0,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = ln2 - (+\infty) + 3 = -\infty$$

- Στο διάστημα $A_2 = [1,2)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2) = \left(\lim\limits_{x\to 2^-} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty - \frac{1}{2} + 3 = -\infty$$

Αφού $0 \in f(A_1)$, $0 \in f(A_2)$ και σε καθένα από τα διαστήματα A_1, A_2 η f είναι γνήσια μονότονη, ισχύει ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς μια ρίζα $x_1 \in (0,1)$ και ακριβώς μια ρίζα $x_2 \in (1,2)$.

Είναι $x_1, x_2 \neq 1$ αφου $f(1) \neq 0$. Άρα υπάρχουν ακριβώς δύο x_1, x_2 με

$0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$ ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Η ρίζα x_1 ανήκει στο διάστημα (0,1) όπου η f είναι γνησίως αύξουσα.

Αν ισχύει $x_1 \geq \frac{1}{3} \Rightarrow f(x_1) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow 0 \geq \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3 \Rightarrow$

$$0 \geq ln\frac{5}{3} - 3 + 3 \Rightarrow$$

$$ln1 \geq ln\frac{5}{3} \Rightarrow 1 \geq \frac{5}{3} \quad \boldsymbol{ATOΠO}$$

Άρα ισχύει $x_1 < \frac{1}{3}$

Δ3. Αφού $0 < x_1 < \frac{1}{3} < 1$ ορίζεται το διάστημα $[x_1, \frac{1}{3}] \subseteq (0,1)$

<u>Θεώρημα Μέσης Τιμής για f στο διάστημα</u> $[x_1, \frac{1}{3}]$:

Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $[x_1, \frac{1}{3}]$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Άρα η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $(\xi, f(\xi))$ είναι ίση με

$$f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Είναι $f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}(x-2)' + (x^{-2})' = -\frac{1}{(x-2)^2} - 2 \cdot x^{-3} =$

$$= -\left[\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x^3}\right] < 0\,, \textit{για κάθε } x \in (0,2)$$

Άρα $f''(x) < 0$, *για κάθε* $x \in (0,2)$, *άρα* f' *γνησίως φθίνουσα στο* $(0,2)$,

άρα είναι μοναδικό το $\xi \in (0,1)$ *ώστε* $f'(\xi) = \dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$

Δ4.

I. Αφού οι συναρτήσεις F, G είναι παράγουσες της f στο $(0,2)$ ισχύει ότι οι F,G είναι παραγωγίσιμες στο $(0,2)$ με $F'(x) = G'(x) = f(x) = \ln(x-2) - \frac{1}{x} + 3$, *για κάθε* $x \in (0,2)$ *άρα είναι* $F(x) = G(x) + c$ *, για κάθε* $x \in (0,2)$.

Επομένως για $x = x_1$ *ισχύει* $\cancel{F(x_1)}^{0} = G(x_1) + c \;\Rightarrow G(x_1) = -c$

Και για $x = x_2$ *ισχύει* $F(x_2) = \underbrace{\cancel{G(x_2)}}_{0} + c \;\Rightarrow F(x_2) = c$

Με πρόσθεση κατά μέλη ισχύει $G(x_1) + F(x_2) = 0$

II. Εξίσωση $x_1 \cdot F(x) + x_2 \cdot G(x) = x_1 + x_2 - 2x \;\Leftrightarrow$
$x_1 \cdot F(x) + x_2 \cdot G(x) + 2x - x_1 - x_2 = 0$
Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = x_1 \cdot F(x) + x_2 \cdot G(x) + 2x - x_1 - x_2$, $x \in (0,2)$

Και αρκεί να δείξω ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$ στο διάστημα (x_1, x_2).

<u>Θεώρημα Bolzano για h στο</u> $[x_1, x_2]$:

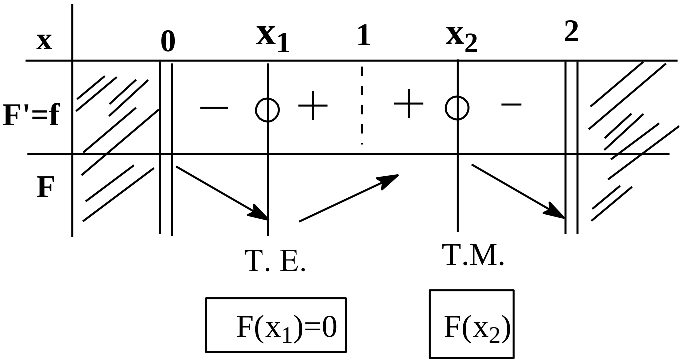
Η h είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ ως πράξεις των συνεχών συναρτήσεων $F(x)$, $G(x)$, $2x$ (ως παραγωγίσιμες) και x_1, x_2 σταθερές.

$$h(x_1) = x_1\underbrace{F(x_1)}_{0} + x_2 G(x_1) + 2x_1 - x_1 - x_2 = x_2\big(-F(x_2)\big) + x_1 - x_2 =$$
$$= x_1 - x_2 - x_2 F(x_2) < 0$$

άρα $h(x_1) < 0$, αφού $x_1 - x_2 < 0$
$x_2 > 0 \Rightarrow -x_2 < 0$
$F(x_2) > 0 \Rightarrow -x_2 F(x_2) < 0$

Άρα $h(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 \underbrace{G(x_2)}_{0} + 2x_2 - x_1 - x_2 = x_1 F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$

αφού $x_2 - x_1 > 0$
$x_1 > 0$, $F(x_2) > 0 \Rightarrow x_1 F(x_1) > 0$



- Για $0 < x < x_1 \xRightarrow{f\nearrow(0,1]} f(x) < f(x_1) \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow F'(x) < 0$
- Για $x_1 < x \leq 1 \xRightarrow{f\nearrow(0,1]} f(x_1) < f(x) \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow F'(x) > 0$
- Για $1 \leq x < x_2 \xRightarrow{f\searrow[1,2)} f(x) > f(x_2) \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow F'(x) > 0$
- Για $x_2 < x < 2 \xRightarrow{f\searrow[1,2)} f(x_2) > f(x) \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow F'(x) < 0$

κι αφού F συνεχής στο (0,2) (ως παραγωγίσιμη) ισχύει ότι:

F γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,x_1]$

F γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_1, x_2]$

F γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_2, 2)$

Αφού $x_1 < x_2 \xRightarrow{F\nearrow[x_1,x_2]} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{F(x_1)} < F(x_2) \Rightarrow F(x_2) > 0$

Άρα $h(x_1)h(x_2) < 0$, άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2).

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) στο διάστημα (x_1, x_2) με

$$h'(x_1) = x_1 F'(x) + x_2 G'(x) + 2 =$$

$$= x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 =$$

$$= (x_1+x_2) f(x) + 2 > 0 , \quad \text{για κάθε } x \in (x_1 , x_2)$$

$$\text{αφού } x_1 + x_2 > 0,\ f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (x_1 , x_2)$$

Άρα η h είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα (x_1,x_2) , άρα η ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$ στο διάστημα (x_1, x_2) είναι μοναδική.

Επιμέλεια Λύσεων

ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΑΝΝΙΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ
ΜΑΡΚΑΤΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ