ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 186

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 142

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 161

Α4.
α. ΣΩΣΤΟ
β. ΣΩΣΤΟ
γ. ΣΩΣΤΟ
δ. ΛΑΘΟΣ
ε. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}\qquad f(x)=x^4-2x^2+1$$
$$g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}\qquad g(x)=\sqrt{x}$$

Συνάρτηση $h=fog$

• $A_h=A_{fog}=\{x\in A_g \;\kappa\alpha\iota\; g(x)\in A_f\}=\{x\geq 0\;\kappa\alpha\iota\;\sqrt{x}\leq 1\Leftrightarrow x\leq 1\}=[0,1]$

• $h(x)=(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^4-2(\sqrt{x})^2+1=$
$$=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

Β2.

$h'(x)=2(x-1)\leq 0\;\;\gamma\iota\alpha\;\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\;x\in[0,1].$

Το = ισχύει μόνο για $x=1$. Άρα $h\searrow$ στο $[0,1]$ και h συνεχής στο $\mathrm{A}=[0,1]$ οπότε:

$h(A)=[h(1),h(0)]=[0,1]$.

Αφού $h\searrow$ είναι και 1 – 1 οπότε αντιστρέφεται, δηλαδή ορίζεται η $h^{-1}:h(A)\to A$

Έχουμε $y=h(x)\Leftrightarrow y=(x-1)^2,\;\mu\varepsilon\;\;y\in h(A)\Leftrightarrow|x-1|=\sqrt{y}\overset{x-1\leq 0}{\Longleftrightarrow}$

$1-x=\sqrt{y}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{y}\;,y\in[0,1]$. Άρα $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}\quad\mu\varepsilon\quad x\in[0,1]$.

Β3. $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{h^{-1}(x)}{x-1} & , \quad x \in [0,1) \\ \\ \dfrac{1}{2} & , \quad x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} & , \quad x \in [0,1) \\ \\ \dfrac{1}{2} & , \quad x = 1 \end{cases}$

Για κάθε $x \in [0,1)$ *η συνάρτηση* $\varphi(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων : $1 - x$ *και* $\sqrt{x}$, 1 .

Στο $x_0 = 1$ $\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$, άρα φ συνεχής στο $x_0 = 1$.

Άρα $\varphi(x)$ συνεχής στο $[0,1]$.

$\left.\begin{aligned} \varphi(0) &= 1 \\ \varphi(1) &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$ Άρα $\varphi(0) \neq \varphi(1)$

Για τη συνάρτηση $\varphi(x)$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$.

Αν $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xRightarrow{\eta\mu x \nearrow,\ [0,\frac{\pi}{2}]} \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$

Από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών η εξίσωση $\varphi(x) = \eta\mu\alpha$ με $x \in [0,1]$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_0 \in (0,1)$.

ΘΕΜΑ Γ

Συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(0) = 0$

και f παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$

με $f'(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x < -1 \\ 3x^2 - 1 & , \quad x > -1 \end{cases}$

Γ1.

Επομένως $f(x) = \left\{\begin{aligned} -2x + c_1 & \quad , \quad x < -1 \\ x^3 - x + c_2 & \quad , \quad x > -1 \end{aligned}\right\}$ για κάθε $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$

Αφού $f(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$

f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $x = -1$

Οπότε $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \quad (1)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}(-2x+c_1) = 2 + c_1 \\[2ex] \lim\limits_{x\to -1^+}(x^3 - x) = 0\end{array}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} 2 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -2$$

Άρα $f(-1) = 0$

Οπότε $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & , \quad x \le -1 \\ x^3 - x & , \quad x > -1 \end{cases}$

Γ2.

Για $x > -1$ $είναι$ $f(x) = x^3 - x$

άρα $f'(x) = 3x^2 - 1$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α $(x_0, f(x_0))$, $x_0 > -1$ έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (x_0^3 - x_0) = (3{x_0}^2 - 1)(x - x_0)$ (1)

Αφού η εφαπτομένη τέμνει τον y'y στο σημείο (0,-2) ,

ισχύει από (1) ότι: $-2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0 \Leftrightarrow 2x_0^3 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$

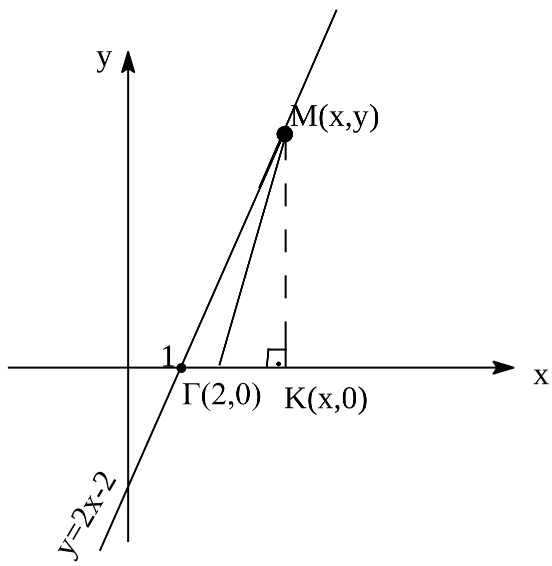
Από (1) η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = 2x - 2$

Γ3.

Για το σημείο Μ(x, y) ισχύει $y = 2x - 2$ όπου $x = x(t)$, $y = y(t)$

(ΜΚ) $= y = 2x - 2$, $x > 2$

(ΚΓ) $= x - 2$



Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ είναι

Ε $= \frac{1}{2}(MK)(K\Gamma) = \frac{1}{2}(2x-2)(x-2) =$
$= \frac{1}{2}2(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$, $x > 2$

Αφού $x = x(t)$ ισχύει:

$E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2$, $x(t) > 2$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι

$E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t) = x'(t)(2x(t) - 3)$

Τη στιγμή $t = t_0$ $είναι$ $x(t_0) =$
3 και τότε δίνεται ότι
$x'(t_0) = 2\ \mu o\nu/sec.$

Οπότε $E'(t_0) = x'(t_0)(2x(t_0) - 3) = 2(2 \cdot 3 - 3) = 6\ \tau.\mu o\nu/sec$

Γ4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

Θέτω $u = f(x)$ $\mu\varepsilon$ $x < -1$ $\quad \alpha\varphi o\acute{\upsilon}$ $x \to -\infty$, $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $f(x) = -2x - 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-2) = +\infty$, άρα για $x \to -\infty$ είναι $u \to +\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u} = 0$

Αφού $|\eta\mu u| \le 1 \overset{|u|\neq 0}{\Longrightarrow} \frac{|\eta\mu u|}{|u|} \le \frac{1}{|u|} \Leftrightarrow \left|\frac{\eta\mu u}{u}\right| \le \frac{1}{|u|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|u|} \le \frac{\eta\mu u}{u} \le \frac{1}{|u|}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|u|}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|u|} = 0$$

Από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3} = \lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1+u^3} = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^3-u}{1+u^3} = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{u^3} = 1$$

- Θέτω $u = -x \Leftrightarrow x = -u$
- Όταν $x \to -\infty \Longrightarrow u \to +\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right] = 0 + 1 = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Συνάρτηση $f \,:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $f(x) = x - ln(3x)$

Δ1.

i. f παραγωγίσιμη , άρα και συνεχής στο $(0,+\infty)$ με :

$$f'(x) = 1 - \frac{(3x)'}{3x} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$f'(x) \ge 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$$

x	0		1		+∞
f'(x)		−	0	+	
f(x)		↘	O.E	↗	

f(1) = 1-ln3

f ↘ $\sigma\tau o$ (0,1]

f ↗ $\sigma\tau o$ $[1,+\infty)$

Στο $x_0 = 1$ παρουσιάζει ολ. Ελάχιστο το $f(1) = 1 - ln3 = lne - ln3 < 0$ αφού $e < 3$.

- Στο $A_1 = (0,1]$ η f ↘ και συνεχής οπότε:

$$f(A_1) = [f(1), \lim_{x\to0^+} f(x)] = [1 - ln3\,, +\infty]$$

$$\lim_{x\to0^+}(x - \ln(3x)\,) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

- Στο $A_2 = [1,+\infty)$ η $f \nearrow$ και συνεχής οπότε:

$$f(A_2) = [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)] = [1 - ln3\,, +\infty]$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x - \ln(3x)) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\left[x(1 - \frac{\ln(3x)}{x}\right] = (+\infty)(1-0) = +\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(ln3x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Αφού $0 \in f(A_1)$ *και* $0 \in f(A_2)$ *και* f γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα A_1, A_2 υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1)$ *ώστε* $f(x_1) = 0$ και υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1,+\infty)$ *ώστε* $f(x_2) = 0$ $(x_1, x_2 \neq 1$ *αφού* $f(1) \neq 0)$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $0 < x_1 < 1 < x_2$.

ii. f' παραγωγίσιμη και συνεχής στο $(0,+\infty)$ με $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, *άρα* f κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Δ2. Λύνω την εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ ή $x = x_2$ με $0 < x_1 < 1 < x_2$ από το **Δ1**

i) f συνεχής στο $(0,+\infty)$, το ζητούμενο εμβδόν είναι :

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx$$

- Για $x_1 \le x \le 1 \xrightarrow{f\searrow(0,1]} f(x) \le 0$, *άρα* $f(x) \le 0$

- Για $1 \le x \le x_2 \xrightarrow{f\nearrow[1,+\infty)} f(x) \le 0$, *για κάθε* $[x_1, x_2]$

$$\text{E} = -\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx = -\int_{x_1}^{x_2}(x - \ln(3x))\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} x dx + \int_{x_1}^{x_2} \ln(3x)\,dx =$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}(x)'\ln(3x)\,dx = -\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + [xln(3x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x\frac{1}{x}dx =$$

• $f(x_1) = 0 \Leftrightarrow$ $x_1 - \ln(3x_1) = 0 \Leftrightarrow$ $x_1 = \ln(3x_1)$
• $f(x_2) = 0 \Leftrightarrow$ $x_2 - \ln(3x_2) = 0 \Leftrightarrow$ $x_2 = \ln(3x_2)$

$$= -\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + x_2\ln(3x_2) - x_1\ln(3x_1) - (x_2 - x_1) =$$

$$\longrightarrow = -\frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2} + x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) =$$

$$= (x_2 - x_1)\left[-\frac{(x_2 + x_1)}{2} + x_2 + x_1 - 1\right] =$$

$$= (x_2 - x_1)\left(\frac{x_2 + x_1 - 2}{2}\right) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

Δ3.

Έχουμε $\quad 0 < x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -1 > -x_2$

$$2 - x_1 > 1 > 2 - x_2$$

Άρα $2 - x_1 \in (1, +\infty)$

Θα δείξω ότι :

$$f(2 - x_1) < 0 \Leftrightarrow f(2 - x_1) < f(x_2) \overset{f\nearrow[1,+\infty]}{\Longleftrightarrow} 2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow$$

$$x_1 + x_2 > 2 \quad \textbf{ΙΣΧΥΕΙ}$$

αφού από **Δ2.** $\mathrm{E} = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$,

άρα $x_1 + x_2 - 2 > 0$

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f $στο$ $(x_2, f(x_2)) = (x_2, 0)$ είναι:

$$y - \underbrace{f(x_2)}_{0} = f'(x_2)(x - x_2) \Rightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$$

Αφού f κυρτή στο $(0, +\infty)$ η (ε) θα βρίσκεται κάτω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ (**1**) για κάθε $x \in (0, +\infty)$,

όπου το $=$ ισχύει μόνο για $x = x_2$.

Από **Δ1 i)** Η f έχει ολικό ελάχιστο το f(1)=1-ln3, άρα για κάθε $x > 0$ $ισχύει$ $f(x) \geq 1 - ln3$ (**2**) ,

όπου το = ισχύει μόνο στη θέση ολικού ελάχιστου δηλαδή μόνο για $x = 1$.

Οπότε $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$

$$\begin{array}{l} f(x) \geq 1 - ln3 \\ \hline \end{array} \quad +$$

$$2f(x) > f'(x_2)(x - x_2) + 1 - ln3 \quad \Leftrightarrow$$

$$2f(x) + ln3 > 1 + f'(x_2)(x - x_2) \quad \text{, επειδή}$$

- Το = δεν ισχύει ταυτόχρονα στις (1) , (2) αφού $x_2 \neq 1$
- Άρα η εξίσωση $2f(x) + ln3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ είναι **ΑΔΥΝΑΤΗ** στο (0,+∞)

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ

ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΑΝΝΙΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

ΜΑΡΚΑΤΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ