ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α. Ορισμός στο σχολικό βιβλίο σελίδα 15.

β. **i)** Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη όταν είναι συνάρτηση 1-1.
ii) Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνάρτηση 1-1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών $f(A)$ της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως, ορίζεται μια συνάρτηση

$$g: f(A) \to \mathbb{R}$$

με την οποία κάθε $y \in f\,(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο $f\,(x) = y$.
Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

- Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f\,(A)$ της f
- Έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f
- Ισχύει η ισοδυναμία: $f\,(x) = y \Leftrightarrow g\,(x) = x$

Η συνάρτηση g λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζεται f^{-1}.

Επομένως: $f\,(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}\,(y) = x$

Α2. Διατύπωση Θ. Fermat → σχολικό βιβλίο σελίδα 142
Α3. Απόδειξη του Θεωρήματος → σχολικό βιβλίο σελίδα 135
Α4.

α. Λάθος → Αιτιολόγηση στο σχόλιο → σχολικό βιβλίο σελίδα 134

β. Λάθος → Αιτιολόγηση: η σχέση $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ισχύει **μόνο** όταν η f είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της .

π.χ. $f\,(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

όπου, $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, ενώ $f\,(0) = 1$

Α5. Σωστή απάντηση είναι η **(γ)** αφού:

$$\int_{\alpha}^{\delta} f\,(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\,(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f\,(x)dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx =$$

$$= E\,(\Omega_1) - E\,(\Omega_2) + E\,(\Omega_3) = 2 - 1 + 3 = 4$$

ΘΕΜΑ Β

Συνάρτηση $f\,(x) = e^{-x} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

Β1. Αφού η ευθεία $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f\,(x) = 2$$

όπου , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^{-x} + \lambda) = \lim\limits_{u\to-\infty} (e^{u} + \lambda) = 0 + \lambda = \lambda$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = -x \\ x = +\infty \\ u = -\infty \end{array}}$$

Άρα $\lambda = 2$

Β2. Αφού $\lambda = 2$ είναι $f(x) = e^{-x} + 2$, $x \in \mathbb{R}$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x = e^{-x} + 2 - x$, $x \in \mathbb{R}$
και αρκεί να δείξω ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2{,}3)$ ώστε $g\,(x_0) = 0$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα [2,3] ως άθροισμα των συνεχών e^{-x} (εκθετική) και $2 - x$ (πολυωνυμική)

- $$\left.\begin{array}{l} g\,(2) = e^{-2} + 2 - 2 = \frac{1}{e^2} > 0 \\ g\,(3) = e^{-3} + 2 - 3 = \frac{1}{e^3} - 1 = \frac{1-e^3}{e^3} < 0 \end{array}\right\} g(2)\cdot g(3) < 0$$

Άρα, από Θ. Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2{,}3)$

ώστε $g(x_0) = 0$

Είναι $g'(x) = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, άρα $g \downarrow$ στο $\mathbb{R}$

Επομένως, το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$
σε όλο το $\mathbb{R}$.

Β3. Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = -e^{-x} < 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι $\downarrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα η f είναι 1-1 άρα ορίζεται η συνάρτηση

$$f^{-1}: f\,(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

Αφού η f είναι συνεχής και $\downarrow$ στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f\,(\mathbb{R}) = (\lim_{x\to+\infty} f(x)\,,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)) = (2,+\infty)$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ (από **Β1.**)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^{-x}+2) = \lim\limits_{u\to+\infty} (e^{u}+2) = +\infty + \mathbf{2} = +\infty$

$$\begin{array}{|l|}\hline u=-x \\ x\to-\infty \\ u\to+\infty \\ \hline\end{array}$$

Άρα, $f^{-1} : (2,+\infty) \to \mathbb{R}$

Έστω $y = f\,(x) \Leftrightarrow y = e^{-x} + 2\,,\ y > 2 \Leftrightarrow$
$e^{-x} = y - 2 \Leftrightarrow$
$lne^{-x} = \ln(y-2) \Leftrightarrow$
$-x = \ln(y-2) \Leftrightarrow$
$x = -\ln(y-2)\ ,y > 2$

Άρα $f^{-1}\,(y) = -\ln(y-2)\ ,\ y > 2$

Β4. Είναι $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)\ ,x \in (2,+\infty)$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = -\lim\limits_{x\to2^+} \ln(x-2) = -\lim\limits_{u\to0^+} lnu = 2 = -(-\infty) = +\infty$

$$\begin{array}{|l|}\hline u=x-2 \\ x\to 2 \\ u\to 0^+ \\ \hline\end{array}$$

Άρα η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f
(από δεξιά και πάνω)

Γραφική παράσταση των C_f , ${C_f}^{-1}$

Οι C_f , ${C_f}^{-1}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$

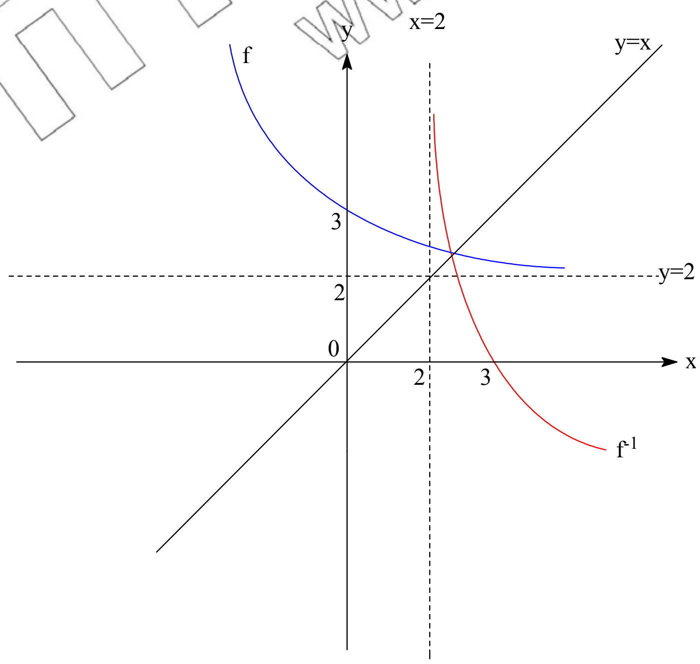
- Για $x = 0$ είναι $f\,(0) = e^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο (0,3)

- $f^{-1}(x) = 0\,, x > 2 \Leftrightarrow$

$-\ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow$

$x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$

Άρα η ${C_f}^{-1}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο (3,0)



ΘΕΜΑ Γ

Παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha & ,x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x & ,x < 1 \end{cases}$$

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη) , άρα η f είναι συνεχής και στο $x = 1$

Άρα ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ όπου

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 + a) = 1 + a$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = e^0 + \beta = 1 + \beta$$

$$f(1) = 1^2 + a = 1 + a$$

Άρα ισχύει $1 + \alpha = 1 + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$, άρα τα όρια

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

είναι ο ίδιος πραγματικός αριθμός όπου:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2+a)-(1+a)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)\,(x-1)}{x-1} = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\left(e^{x-1}+\beta x\right)-(1+a)}{x-1} \underset{(a=\beta)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\varepsilon^{x-1}+ax-1-a}{x-1} \overset{(\frac{0}{0})}{\underset{\text{D.L.H}}{=}} \lim_{x\to 1^-} (e^{x-1} + a) = e^0 + a = 1 + a$$

Άρα $1 + \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$ άρα $\alpha = \beta = 1$

Γ2.

Αφού $\alpha = \beta = 1$ είναι $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \geq 1 \\ e^{x-1} + x & , x < 1 \end{cases}$

- $\forall x > 1$ η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x$, άρα $f'(x) > 0$, $\forall x \in (1 + \infty)$

- $\forall x < 1$ η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^{x-1} + 1$, άρα $f'(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty, 1)$

Αφού $f'(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και f συνεχής στο $x = 1$ ισχύει ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αφού f συνεχής και $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$, το σύνολο των τιμών της f είναι το

$$f\,(\mathbb{R}) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

αφού:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^{x-1} + x) = \lim_{u\to-\infty} (e^u + u + 1) =$$

$$= 0 + (-\infty) + 1 = -\infty \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = x - 1 \\ x \to u + 1 \\ x \to -\infty \\ u \to -\infty \\ e^u \to 0 \end{array}}$$

και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 + 1) = +\infty$

Γ3.

i. Στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0)$ η f είναι συνεχής και $\uparrow$, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$$f\,(A_1) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to0^-} f(x)\right) = (-\infty, \tfrac{1}{e})$$

- $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} (e^{x-1} + x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Αφού $0 \in f(A_1) = (-\infty\ , \frac{1}{e})$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in A_1 = (-\infty, 0)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Το x_0 είναι αρνητικός αριθμός επειδή $x_0 \in (-\infty, 0)$ και είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ σε όλο το $\mathbb{R}$ αφού $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

ii. Εξίσωση $f^2(x) - x_0 \cdot f(x) = 0$, $x \in (x_{0,} + \infty) \Leftrightarrow$
$f(x) \cdot (f(x) - x_0) = 0$

$\forall\, x > x_0 \overset{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0) \Longrightarrow f(x) > 0 \Longrightarrow f(x) > 0 > x_0$

Άρα $f(x) > 0$ και $f(x) > x_0 \Longrightarrow f(x) - x_0 > 0$

Επομένως $\underset{>0}{\underset{\downarrow}{f(x)}} \cdot \underbrace{(f(x) - x_0)}_{>0} > 0$, $\forall x \in (x_0, +\infty)$

Άρα η εξίσωση $f(x) \cdot (f(x) - x_0) = 0$, $x \in (x_0, +\infty)$ είναι αδύνατη

Γ4.

Το σημείο Μ κινείται πάνω στην καμπύλη
$y = f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 1$

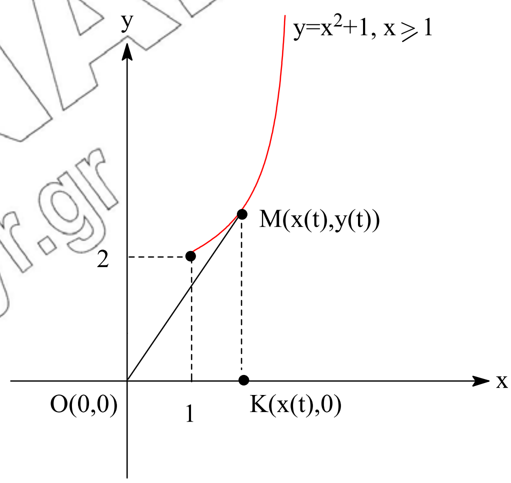
άρα έχει συντεταγμένες $M(x(t), y(t))$ όπου

$y\,(t) = x^2(t) + 1, \;\; x(t) \geq 1$

Δίνεται ότι τη στιγμή t_0 που το Μ διέρχεται

από το σημείο $A(3{,}10) = (x(t_0), y(t_0))$

ισχύει $x'(t_0) = 2\; \mu o\nu/sec$



Το τρίγωνο $M\hat{O}K$ με κορυφές $(x(t), y(t))$, Ο(0,0) και $K\;(x(t), 0)$ έχει εμβαδόν:

$$E(t) = \frac{1}{2}|x(t)| \cdot |y(t)| \underset{\boxed{\begin{array}{l} x(t) \geq 1 \\ y(t) = x^2(t) + 1 \geq 1 \end{array}}}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{1}{2}x(t) \cdot y(t) = \frac{1}{2}x(t) \cdot (x^2(t) + 1) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\big(x^3(t) + x(t)\big) \quad , \quad x(t) \geq 1$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι:

$$E'(t) = \frac{1}{2}\big(3x^2(t) \cdot x'(t) + x'(t)\big) = \frac{1}{2} \cdot (3x^2(t) + 1) \cdot x'(t)$$

Άρα τη στιγμή t_0 ισχύει:

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}(3x^2(t_0) + 1) \cdot x'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 3^2 + 1) \cdot 2 = 28\ \tau\varepsilon\tau.\mu o\nu/sec$$

ΘΕΜΑ Δ

Συνάρτηση $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) + ax + \beta$, $x \in \mathbb{R}$ $a, \beta \in \mathbb{R}$

Δ1. $f'(x) = (x-1)' \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \cdot (\ln(x^2 - 2x + 2))' + (ax + \beta)' =$

$= \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \cdot \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \cdot (2x - 2) + a =$

$= \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + a$, $x \in \mathbb{R}$

Η ευθεία (ε): $y = -x + 2$ εφάπτεται της C_f στο σημείο Α(1,1) άρα ισχύουν

$$f(1) = 1 \quad , \quad f'(1) = \lambda_\varepsilon = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(1) = 1 \Leftrightarrow a + \beta = 1 \\ \bullet\ f'(1) = -1 \Leftrightarrow a = -1 \end{array}\right] a = -1 \quad , \ \beta = 2$$

Άρα $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

Δ2. Οι συναρτήσεις $f(x)$, $g(x) = -x + 2$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμες), άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_1^2 |f(x) - g(x)| dx$$

όπου $f(x) - g(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2 - (-x + 2) =$

$$= (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

- $\forall x \in [1,2]$ δηλαδή $1 \le x \le 2$ ισχύει $x-1 \ge 0$

  και $x^2-2x+2=(x^2-2x+1)+1=$

  $=(x-1)^2+1 \ge 1 \Longrightarrow \ln((x-1)^2+1) \ge ln1 \Longrightarrow$

  $\ln(x^2-2x+2) \ge 0$

Άρα $f\,(x)-g(x)=(x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2) \ge 0, \forall x \in [1,2]$

Άρα $E=\int_1^2 \big(f(x)-g(x)\big)dx=\int_1^2 (x-1)\cdot\ln(x^2-2x+2)\,dx=$

$=\frac{1}{2}\int_1^2 lnudu=\frac{1}{2}\int_1^2 (u)' lnudu=$

$=\frac{1}{2}[ulnu]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 u\cdot\frac{1}{u}du=$

$=\frac{1}{2}(2ln2-\underbrace{ln1}_{0})-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(2-1)=ln2-\frac{1}{2}\ \ \tau.\mu$

$u=x^2-2x+2$

$du=(2x-2)dx$

$du=2(x-1)dx$

$\frac{1}{2}du=(x-1)dx$

- Για $x=1$ είναι $u=1$
- Για $x=2$ είναι $u=2$

Δ3.

i. $f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1=$

$$=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2x^2-4x+2-x^2+2x-2}{x^2-2x+2}=$$

$$=\ln(x^2-2x+2)+\frac{x^2-2x}{x^2-2x+2}\,,\quad x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x^2-2x+2}\cdot(2x-2)+\frac{(2x-2)(x^2-2x+2)-(x^2-2x)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=$$

$$=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{(2x-2)(x^2-2x+2-x^2+2x)}{(x^2-2x+2)^2}=$$

$$=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{2(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=$$

$$=\frac{(2x-2)(x^2-2x+2)+2(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=$$

$$= \frac{2(x-1)\cdot(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+2)^2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$\left(\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει } x^2 - 2x + 4 > 0 \ (\Delta < 0) \\ \text{και } (x^2-2x+2)^2 > 0 \end{array} \right)$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Η f' είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνήσια αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα η f' παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** το

$$f'(1) = -1 \ \text{ άρα } \forall x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	-	0	+
f'	↘		↗

ΟΛ. ΕΛΑΧ.

f'(1) = -1

Ισχύει:

$$f'(1) \geq -1$$

(όπου η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$ που είναι η μοναδική θέση **ολικού ελάχιστου** της f')

ii. Θέλω να δείξω ότι $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1)\cdot \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq \underbrace{(\lambda - 1)\cdot \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2}_{f(\lambda)} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\tfrac{1}{2}$$

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lambda < \lambda + \frac{1}{2}$, άρα ορίζεται το διάστημα $[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}]$

στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, άρα από Θ.Μ.Τ,

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\lambda, \lambda + \frac{1}{2})$ ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\,f'(\xi)=f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)$$

Από (Δ3.Ι) ισχύει $f'(\xi)\geq -1 \overset{\cdot\frac{1}{2}}{\Rightarrow}\ \frac{1}{2}\,f'(\xi)\geq -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq -\frac{1}{2}$$

Δ4.

- Η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$ εφάπτεται της C_f στο σημείο της

$$A\big(1,f(1)\big)=(1,1)$$

- $g'(x)=-3x^2-1\ ,\quad x\in\mathbb{R}$

  Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $(x_0,g(x_0))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $g'(x_0)$.

Λύνω την εξίσωση $g'(x_0)=\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow -3x_0^2-1=-1\Leftrightarrow$

$$-3x_0^2=0\Leftrightarrow x_0=0$$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $B\big(0,g(0)\big)=(0,2)$ έχει εξίσωση

$$y-g(0)=g'(0)\cdot(x-0)\Leftrightarrow$$

$$y-2=-1\cdot x\Leftrightarrow$$

$$y=-x+2$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$ εφάπτεται και της C_g στο σημείο Β(0,2).

Ισχύει $f'(x)\geq -1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ όπου η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$

και ισχύει $g'(x)\leq -1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ όπου η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

Άρα ισχύει $g'(x)\leq -1\leq f'(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ όπου $g'(x)=-1$ μόνο

για $x=0$ και $f'(x)=-1$ μόνο για $x=1$.

Αν μια άλλη ευθεία (δ) εφάπτεται των C_f , C_g στα σημεία $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, g(x_2))$ αντίστοιχα με $x_1 \neq 1$ και $x_2 \neq 0$, τότε ισχύει $f'(x_1) = g'(x_2)$, **άτοπο**, αφού $g'(x_2) < -1 < f'(x_1)$.

Άρα η ευθεία (ε): $y = -x + 2$ είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f , C_g .

Επιμέλεια λύσεων

ΑΝΝΙΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ
ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ