ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 334 – 335
Α.2 βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 246
Α.3 βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 222
Α.4 **α** → Λ, **β** → Σ , **γ** → Σ, **δ** → Λ, **ε** → Σ

ΘΕΜΑ Β

Β.1 Ισχύει $(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow$

$$(z-2)(\overline{z-2})+|z-2|=2 \Leftrightarrow$$

$$|z-2|^2+|z-2|-2=0 \Leftrightarrow$$

$$|z-2|=\begin{cases}1 & \text{Δεκτό}\\ -2 & \text{Απορ.}\end{cases} \quad (\text{αφού } \ |z-2|\ge 0)$$

Άρα $|z-2|=1$, άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος κέντρου K(2,0) κι ακτίνας ρ=1

Ισχύει $$\underbrace{\big||z|-|2|\big|\le |z-2|}_{\text{τριγωνική ανισότητα}}=1$$

Άρα : $\big||z|-2\big|\le 1 \Leftrightarrow -1\le |z|-2\le 1 \Leftrightarrow$

$$1\le |z|\le 3 \quad \text{άρα} \quad |z|\le 3$$

Β.2 Οι μιγαδικοί z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης
$w^2+\beta w+\gamma=0$ με $w\in C$ και $\beta,\gamma\in R$
άρα $\bar{z}_1=z_2$ κι αφού ο z_1,z_2 ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο ισχύει
$|z_1-2|=1$, $|z_2-2|$, $|z_1|\le 3$, $|z_2|\le 3$

Αφού $\bar{z}_1=z_2$ ισχύει $\text{Im}(z_2)=-\text{Im}(z_1)$

Δίνεται $\left|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)\right|=2 \Leftrightarrow \left|2\cdot \mathrm{Im}(z_1)\right|=2 \Leftrightarrow$

$\left|\mathrm{Im}(z_1)\right|=1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z_1)=\pm 1$

άρα $z_1=\alpha+i$, $z_2=\bar{z}_1=\alpha-i$, $\alpha\in R$

Είναι $|z_1-2|=1 \Leftrightarrow |\alpha+i-2|=1 \Leftrightarrow |(\alpha-2)+i|=1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{(\alpha-2)^2+1^2}=1 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2+\cancel{1}=\cancel{1} \Leftrightarrow \alpha-2=0 \Leftrightarrow \alpha=2$

άρα $z_1=2+i$, $z_2=2-i$

Από τύπους Vieta έχουμε:

$z_1+z_2=S=-\beta \Leftrightarrow -\beta=4 \Leftrightarrow \beta=-4$

$z_1\cdot z_2=P=\gamma \Leftrightarrow z_1\cdot\bar{z}_1=\gamma \Leftrightarrow \gamma=|z_1|^2=\sqrt{2^2+1^2}^{\,2}=5$

B.3 Αφού οι μιγαδικοί α_o, α_1, α_2 ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος B.1 ισχύει $|\alpha_o|\le 3$, $|\alpha_1|\le 3$, $|\alpha_2|\le 3$

Ισχύει $v^3+\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_o \Leftrightarrow$

$v^3=-\alpha_2 v^2-\alpha_1 v-\alpha_o \Rightarrow$

$|v|^3=\left|-\alpha_2 v^2-\alpha_1 v-\alpha_o\right| \Leftrightarrow$

$|v|^3=\left|\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_o\right|\le|\alpha_2|\cdot|v|^2+|\alpha_1|\cdot|v|+|\alpha_o|\le 3|v|^2+3|v|+3$

Άρα ισχύει $|v|^3\le 3|v|^2+3|v|+3 \Leftrightarrow |v|^3-3|v|^2-3|v|-3\le 0$, όπου $|v|\ge 0$.

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2-3x-3,\quad x\in[0,+\infty)$

$f'(x)=3x^2-6x-3=3(x^2-2x-1),\quad x\in[0,+\infty)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\begin{cases}1-\sqrt{2} & \text{Απορ.}\\ 1+\sqrt{2} & \text{Δεκτό}\end{cases}\qquad (x\ge 0)$

x	0		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		−	0	+	
f		↘		↗	
			ΟΛ. ΕΛ.		

Έχουμε ότι ισχύει $f(|v|)\le 0$

Αν υποθέσουμε ότι $|\nu| \geq 4 \overset{f \nearrow [1+\sqrt{2},+\infty)}{\Rightarrow}$

$$f(|\nu|) \geq f(4) \Rightarrow$$

$$f(|\nu|) \geq 1 \quad \left(\begin{aligned} f(4) &= 4^3 - 3\cdot 4^2 - 3\cdot 4 - 3 = \\ &= 64 - 48 - 12 - 3 = 1 \end{aligned} \right)$$

Άτοπο

Άρα **δεν** ισχύει $|\nu| \geq 4$, άρα είναι $|\nu| < 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1 $\forall x \in R$ ισχύει $(f(x)+x)(f'(x)+1) = x \Leftrightarrow$

$$2(f(x)+x)\cdot(f(x)+x)' = 2x \Leftrightarrow$$

$$\left[(f(x)+x)^2\right]' = (x^2)' \Leftrightarrow$$

$$(f(x)+x)^2 = x^2 + c$$

Για x=0 ισχύει $f^2(0) = c \Leftrightarrow c = 1$

άρα $(f(x)+x)^2 = x^2 + 1, \quad \forall x \in R \quad (1)$

Θεωρώ τη συνάρτηση h(x) = f(x)+x , $x \in R$

Λόγω της (1) έχουμε ότι

$h^2(x) = x^2 + 1, \quad \forall x \in R$ όπου $x^2 + 1 \neq 0, \quad \forall x \in R$

άρα $h(x) \neq 0, \quad \forall x \in R$ κι αφού h συνεχής στο R, ως άθροισμα των συνεχών f(x) (ως παραγωγίσιμη) και x (πολυωνυμική), έχουμε ότι η συνάρτηση h(x)=f(x)+x διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R, δηλαδή ισχύει $h(x) > 0, \quad \forall x \in R$ ή $h(x) < 0, \quad \forall x \in R$.

Είναι h(0)=f(0)=1, άρα αφού h διατηρεί στο R σταθερό πρόσημο ισχύει $h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) + x > 0, \quad \forall x \in R$

άρα από (1) έχουμε $f(x) + x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x, \quad x \in R$$

Γ.2 Πεδία ορισμού $A_f = A_g = R$ άρα $A_{fog} = R$

Λύνω πρώτα την εξίσωση $f(x) = 1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+1} - x = 1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+1} = x + 1 \Leftrightarrow$

Περιορισμός: Πρέπει $x^2 + 1 \geq 0$ που ισχύει $\forall x \in R$
και $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{x \geq -1}$

$\sqrt{x^2+1}^{\,2} = (x+1)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow$

$2x = 0 \Leftrightarrow$ **x = 0** Δεκτό

Άρα η μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x)=1 είναι το x=0. Επομένως ισχύει η ισοδυναμία

$$f\left(g(x)\right) = 1 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

Άρα αναζητώ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης g(x)=0

$$g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1, \quad x \in R$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και συνεχής, με

$g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1), \quad x \in R$

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 0$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
g'		+	0	−	0	+	
g		↗		↘		↗	
			Τ.Μ		Τ.Ε.		
			$g(-1) = -\frac{1}{2}$		$g(0) = -1$		

- Η g είναι συνεχής και ↗ στο διάστημα $A_1 = \left(-\infty, -1\right]$ άρα το αντίστοιχο σύνολο τιμών είναι το

$$g\left(A_1\right) = \left(\lim_{x\to-\infty} g(x), g(-1)\right] = \left(\lim_{x\to-\infty} x^3, -\frac{1}{2}\right] = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$$

το οποίο **δεν** περιέχει το 0, άρα δεν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης g(x)=0 στο διάστημα $A_1 = \left(-\infty, -1\right]$

- Η g είναι συνεχής και ↘ στο διάστημα $A_2 = \left[-1, 0\right]$ άρα το αντίστοιχο σύνολο τιμών είναι το

$$g(A_2)=[g(0),g(-1)]=\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$$

το οποίο δεν περιέχει το Ο, άρα **δεν** υπάρχει ρίζα της εξίσωσης g(x)=0 στο διάστημα $A_2=[-1,0]$

- Η g είναι συνεχής και $\nearrow$ στο διάστημα $A_3=[0,+\infty)$ άρα το αντίστοιχο σύνολο τιμών είναι το

$$g(A_3)=\left[g(0),\lim_{x\to+\infty}g(x)\right)=\left[-1,\lim_{x\to+\infty}x^3\right)=[-1,+\infty)$$

το οποίο περιέχει το Ο, άρα αφού g $\nearrow$ στο A_3, υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης g(x)=0 στο διάστημα $(0,+\infty)$

Άρα η εξίσωση $f(g(x))=1 \Leftrightarrow g(x)=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Γ.3 Εξίσωση $\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot$ εφx, $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$

$$\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{ημx}{συνx}\Leftrightarrow$$

$$συνx\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=ημx\cdot f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$$

$$ημx\cdot f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+συνx\cdot\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt=0\Leftrightarrow$$

$$\left(ημx\cdot\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt\right)'=0$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=ημx\cdot\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

Αφού η συνάρτηση f(t) είναι συνεχής στο R, ισχύει ότι η συνάρτηση $\int_{0}^{x}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R,

άρα και η συνάρτηση $\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R,

ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $x-\frac{\pi}{4},\int_{0}^{x}f(t)dt$. Άρα η συνάρτηση

$h(x)=ημx\cdot\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ (άρα και συνεχής) ως

γινόμενο των παραγωγίσιμων ημx, $\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt$ και ισχύει

$$h'(x)=(ημx)'\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt+ημx\cdot\left(\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt\right)'$$

$$h'(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot\int_0^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt+\eta\mu x\cdot f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)'=$$

$$=\sigma\upsilon\nu x\cdot\int_0^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt+\eta\mu x\cdot f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} h(0)=\eta\mu 0\cdot\int_0^{-\frac{\pi}{4}}f(t)dt=0 \\ h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\int_0^{0}f(t)dt=0 \end{array}\right\} h(0)=h\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$$

Άρα από Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

ώστε $h'(x_o)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_o\cdot\int_0^{x_o-\frac{\pi}{4}}f(t)dt+\eta\mu x_o\cdot f\left(x_o-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\ \int_{x_o-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=f\left(x_o-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\varepsilon\varphi x_o$$

β’ τρόπος για το Γ.3: Θεωρώ τη συνάρτηση

$$K(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\varepsilon\varphi x-\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\varepsilon\varphi x+\int_0^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right].$$

Η συνάρτηση f(t) είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο R, άρα η συνάρτηση $\int_0^{x}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα είναι και συνεχής, άρα κι η συνάρτηση $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt$ είναι συνεχής στο R, ως σύνθεση των συνεχών $x-\frac{\pi}{4}$ και $\int_0^{x}f(t)dt$.

Η συνάρτηση $f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ είναι συνεχής στο R ως σύνθεση των συνεχών $x-\frac{\pi}{4}$, f(x). Στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ η συνάρτηση εφx είναι συνεχής ως πηλίκο των συνεχών ημx, συνx.

Άρα η συνάρτηση $K(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\varepsilon\varphi x+\int_0^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt$

είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ως πράξεις μεταξύ των συνεχών συναρτήσεων

$f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, εφx, $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt$

- $K(0)=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\varepsilon\varphi 0+\int_0^{-\frac{\pi}{4}}f(t)dt=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt.$

$\forall x\in R$ ισχύει $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$

άρα $\sqrt{x^2+1} > x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$

Στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ η f είναι συνεχής και είναι f(t)>0, άρα ισχύει $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt > 0$

άρα $K(0) = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt < 0$

- $K\left(\frac{\pi}{4}\right) = f(0)\cdot \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} + \int_0^0 f(t)dt = 1\cdot 1 + 0 = 1 > 0$

Άρα $K(0)\cdot K\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, άρα από Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_o \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ώστε $K(x_o) = 0 \Leftrightarrow f\left(x_o - \frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_o = \int_{x_o - \frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 Έχουμε ότι: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(1+5h) - f(1)}{h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h}\right] = 0 \quad (1)$$

- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+5h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{u\to 1}\frac{f(u) - f(1)}{\frac{u-1}{5}} = 5\cdot\lim\limits_{u\to 1}\frac{f(u) - f(1)}{u-1} = 5f'(1)$

Θέτω $u = 1 + 5h \Leftrightarrow$

$h = \frac{u-1}{5}$ όταν $h \to 0 \Rightarrow u \to 1$

- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{u\to 1}\frac{f(u) - f(1)}{1-u} = -\lim\limits_{u\to 1}\frac{f(u) - f(1)}{u-1} = -f'(1)$

Θέτω $u = 1 - h \Rightarrow h = 1 - u$

όταν $h \to 0 \Rightarrow u \to 1$

$(1) \Leftrightarrow 5f'(1) + f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} x > 1$

x	0		1		$+\infty$
f'	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$	$\searrow$	$\boxed{\text{O.E}}$ $f(1)=1$	$\nearrow$	

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o=1$ to $f(1)=1$

Δ.2 f συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως παραγωγίσιμη

$\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων

Οπότε $g(x)=\int_{\alpha}^{x}\dfrac{f(t)-1}{t-1}dt$ παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με:

$$g'(x)=\left(\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt\right)'=\frac{f(x)-1}{x-1}\quad,\quad x>1$$

- Για κάθε x>1 $\overset{f\nearrow[1,+\infty)}{\Rightarrow}$ $f(x)>f(1)\Rightarrow f(x)>1\Rightarrow f(x)-1>0$

  άρα $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}>0\ ,\ \forall x\in(1,+\infty)$ άρα $g\nearrow$.

Θέτω $h(x)=\int_{x}^{x+1}g(u)du=\int_{\alpha}^{x+1}g(u)du-\int_{\alpha}^{x}g(u)du\ ,x\in(1,+\infty)$ και $\alpha>1$.

Είναι $\int_{\alpha}^{x+1}g(u)du$ παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων

συναρτήσεων x+1, $\int_{\alpha}^{x}g(u)du$ (αφού g(u) συνεχής ως παραγωγίσιμη).

Οπότε h παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$$h'(x)=\left(\int_{\alpha}^{x+1}g(u)du-\int_{\alpha}^{x}g(u)du\right)'=g(x+1)(x+1)'-g(x)=g(x+1)-g(x)$$

$\forall x>1$ ισχύει $1<x<x+1\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}$

$g(x)<g(x+1)\Rightarrow$

Οπότε $h'(x)=g(x+1)-g(x)>0\quad\forall x>1$

Οπότε h $\nearrow$ στο $(1,+\infty)$. Είναι $8x^2+5>1$ και $2x^4+5>1$, $\forall x\in R$.

Η ανίσωση $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du \Leftrightarrow$

$h(8x^2+5) > h(2x^4+5) \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$8x^2+5 > 2x^4+5 \Leftrightarrow$

$8x^2 > 2x^4 \Leftrightarrow$

$8x^2 - 2x^4 > 0 \Leftrightarrow$

$2x^2(4-x^2) > 0 \Leftrightarrow$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$2x^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$4-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2x^2(4-x^2)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

$-2 < x < 2$ με $x \neq 0$.

Οι λύσεις είναι $x \in (-2,0) \cup (0,2)$

Δ.3 $g'(x) = \dfrac{f(x)-1}{x-1}, \quad x > 1$

g’ παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$g''(x) = \left(\dfrac{f(x)-1}{x-1}\right)' = \dfrac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}$ (1)

Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[1,x]$ αφού f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\xi \in (1,x): f'(\xi) = \dfrac{f(x)-1}{x-1}$ (2)

Αφού $1 < \xi < x \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(x) \overset{(2)}{\Rightarrow} f'(x) > \dfrac{f(x)-1}{x-1} \overset{x-1>0}{\Leftrightarrow}$

$f'(x)(x-1)-(f(x)-1) > 0$

Από (1) $\Rightarrow g''(x) > 0$, $\forall x>1$

άρα $g' \nearrow$ στο $(1,+\infty)$, άρα g κυρτή στο $(1,+\infty)$.

Η εξίσωση $(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x} \dfrac{f(t)-1}{t-1}dt = (f(\alpha)-1)(x-\alpha) \overset{\alpha>1}{\Leftrightarrow}$

$g(x) = \dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\cdot(x\text{-}\alpha)$ έχει προφανή ρίζα x=α.

Θεωρώ τη συνάρτηση $F(x)=g(x)-\dfrac{f(α)-1}{α-1}\cdot\left(x-α\right),\ \ x>1$

κι αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση F(x)=0 έχει μοναδική ρίζα το x=α.

F παραγωγίσιμη στο $\left(1,+\infty\right)$, άρα και συνεχής,

με $F'(x)=g'(x)-\dfrac{f(α)-1}{α-1}=g'(x)-g'(α)$, αφού $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$, $x>1$

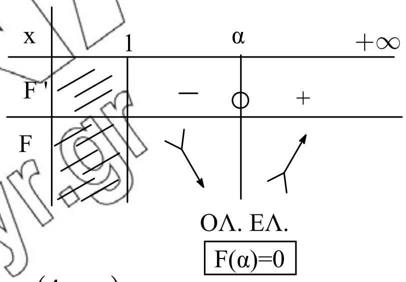
- $F'(α)=g'(α)-g'(α)=0.$
- Για $x>α\overset{g'\nearrow}{\Rightarrow}g'(x)>g'(α)\Rightarrow$

  $\Rightarrow g'(x)-g'(α)>0\Rightarrow$

  $F'(x)>0$

  με F συνεχής στο $\left[α,+\infty\right)$ άρα F $\nearrow$ στο $\left[α,+\infty\right)$, άρα

  $\forall x>α\Rightarrow F(x)>F(α)\Rightarrow F(x)>0$.
- Για $1<x<α\overset{g'\nearrow}{\Rightarrow}g'(x)<g'(α)\Rightarrow\ F'(x)<0$



με F συνεχής στο $\left(1,α\right]$ άρα F $\searrow$ στο $\left(1,α\right]$,

άρα για 1 < x < α $\Rightarrow F(x)>F(α)\Rightarrow F(x)>0$.

Άρα η ρίζα x=α είναι μοναδική της F στο διάστημα $\left(1,+\infty\right)$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ

ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ