ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΙΟΥ 2010
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 βιβλίο σελίδα 304

Α.2 βιβλίο σελίδα 279

Α.3 βιβλίο σελίδα 273 (για την κοίλη)

Α.4
α → Σ
β → Σ
γ → Λ
δ → Λ
ε → Σ

ΘΕΜΑ Β

Β.1 $z+\frac{2}{z}=2, \quad z\neq 0 \iff$

$z^2+2=2z$

$z^2-2z+2=0$

$\Delta=4-8=-4<0$

$$Z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}=\frac{2\pm i\sqrt{4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=\frac{2(1\pm i)}{2}=\begin{cases} z_1=1+i \\ z_2=1-i\end{cases}$$

Β.2 $z_1^2=(1+i)^2=\cancel{1}+2i+\cancel{i^2}=2i$

Άρα $z_i^{2010}=\left[\left(z_1\right)^2\right]^{1005}=\left(2i\right)^{1005}=2^{1005}\cdot i^{1005}=2^{1005}\cdot i^1=2^{1005}\cdot i$

$z_2^2=\left(1-i\right)^2=\cancel{1}-2i+\cancel{i^2}=-2i$

$z_2^{2010}=\left(z_2^2\right)^{1005}=\left(-2i\right)^{1005}=-2^{1005}\cdot i^{1005}=-2^{1005}i$

Άρα $z_1^{2010}+z_2^{2010}=2^{1005}\cdot i-2^{1005}\cdot i=0$

β' τρόπος: $z_1^2=-z_2^2$ άρα $\left(z_1^2\right)^{1005}=(-z_2^2)^{1005}\iff$

$z_1^{2010}=-z_2^{2010}\iff z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$

B3 $z_1 - z_2 = (1+i) - (1-i) = \cancel{1} + i - \cancel{1} + i = 2i$

Άρα $|z_1 - z_2| = |2i| = 2|i| = 2 \cdot 1 = 2$

Άρα $|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$

$|w - (4 - 3i)| = 2$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ο κύκλος κέντρου K(4,-3) και ακτίνας ρ=2.

B4 **α' τρόπος**

$$\left| |w| - \underbrace{|4-3i|}_{5} \right| \le |w - (4-3i)| = 2$$

(τριγωνική ανισότητα)

$||w| - 5| \le 2 \Leftrightarrow$

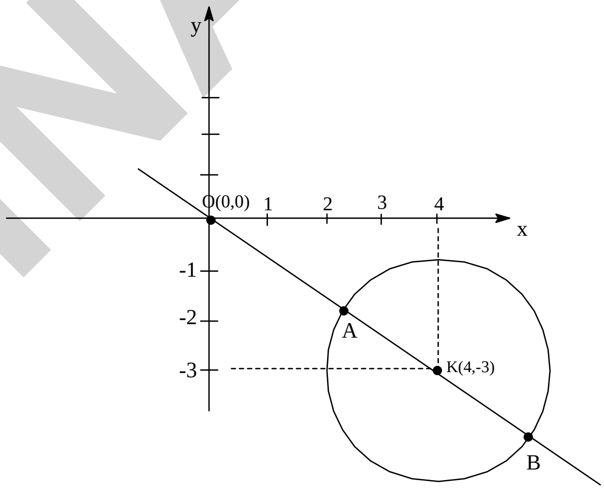
$-2 \le |w| - 5 \le 2 \Leftrightarrow$

$3 \le |w| \le 7$

β' τρόπος

$(OK) = \sqrt{(4-0)^2 + (-3 \cdot 0)^2} =$

$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$



$|w|_{min} = (OA) = (OK) - \rho = 5 - 2 = 3$

$|w|_{max} = (OK) + \rho = 5 + 2 = 7$

Άρα $3 \le |w| \le 7$

<u>**ΘΕΜΑ Γ**</u>

Γ1 $f(x) = 2x + \ln(x^2+1) \;\; x \in R$

Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R (άρα συνεχής) με

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = 2 \cdot \left(1 + \frac{x}{x^2+1}\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^2+1+x}{x^2+1} = 2 \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2+1}, \; x \in R$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$ Αδύνατο, αφού το τριώνυμο x^2+x+1 έχει $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ άρα είναι $x^2 + x + 1 > 0, \; \forall x \in R$.

Άρα $f'(x) > 0, \;\; \forall x \in R$ άρα f γνησίως αύξουσα στο R.

Γ2 Εξίσωση $2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$ (1), όπου $x\in R$

αφού $x^4+1\neq 0$ και $\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}>0,\ \forall x\in R$.

$$(1)\Leftrightarrow 2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln\left(x^4+1\right)\Leftrightarrow$$

$$2\left[x^2-(3x-2)\right]=\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln\left[\left(x^2\right)^2+1\right]\Leftrightarrow$$

$$2x^2+\ln\left[\left(x^2\right)^2+1\right]=2(3x-2)+\ln\left[(3x-2)^2+1\right]$$

$$f\left(x^2\right)=f(3x-2)\overset{f\nearrow\text{άρα } f\ 1-1}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2=3x-2\Leftrightarrow$$

$$x^2-3x+2=0\Leftrightarrow$$

$$x=\begin{cases}1\\2\end{cases}$$

Γ3 f′ παραγωγίσιμη στο R με

$$f''(x)=2\cdot\frac{(2x+1)\left(x^2+1\right)-\left(x^2+x+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=2\cdot\frac{\cancel{2x^3}+\cancel{2x}+x^2+1-\cancel{2x^3}-2x^2-\cancel{2x}}{\left(x^2+1\right)^2}=2\cdot\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\quad,\ x\in R$$

- $f''(x)=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 1$
- $f''(x)>0\Leftrightarrow 1-x^2>0\Leftrightarrow -1<x<1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''	-	0	+	0	-
f	$\cap$		$\cup$		$\cap$
		Σ.Κ. $\boxed{f(-1)=-2+\ln 2}$		Σ.Κ. $\boxed{f(1)=2+\ln 2}$	

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,-1]$, κυρτή στο [-1,1] και κοίλη στο $[1,+\infty)$.
Τα μοναδικά Σ.Κ.της f είναι τα σημεία A(-1,-2+ln2) , B(1,2+ln2) αφού μόνο σ' αυτά αλλάξει η κυρτότητα της f και υπάρχουν οι αντίστοιχες εφαπτόμενες της C_f , αφού f παραγωγίσιμη.

- Η εφαπτομένη (ε_1) της C_f στο σημείο της A(-1,f(-1)) έχει εξίσωση:

$$\begin{aligned} y-f(-1)&=f'(-1)\cdot(x+1) \qquad \text{όπου} \quad f'(-1)=2\cdot\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+1}{1+1}=1 \\ y-(-2+\ln 2)&=1\cdot(x+1) \\ y+2-\ln 2&=x+1 \end{aligned}$$

$$(\varepsilon_1): y=x-1+\ln 2$$

Για x=0 η εξίσωση της (ε_1) δίνει y=-1+ln2 άρα η (ε_1) τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο M(0, -1+ln2)

- Η εφαπτομένη (ε_2) της C_f στο σημείο της B(1, f(1)) έχει εξίσωση

$$\begin{aligned} y-f(1)&=f'(1)\cdot(x-1) \qquad \text{όπου} \quad f'(1)=2\cdot\frac{1+1+1}{1+1}=3 \\ y-(2+\ln 2)&=3(x-1) \\ y-2-\ln 2&=3x-3 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_2: \ y=3x-1+\ln 2$$

Για x=0 η εξίσωση της (ε_2) δίνει $y=-1+\ln 2$ άρα η (ε_2) τέμνει κι αυτή τον άξονα y′y στο σημείο M(0,1+ln2). Άρα οι ε_1, ε_2 τέμνονται πάνω στο σημείο M του άξονα y′y.

Γ4 $I=\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}x\cdot\left(2x+\ln\left(x^2+1\right)\right)dx$

$$=\int_{-1}^{1}2x^2dx+\int_{-1}^{1}x\cdot\ln\left(x^2+1\right)dx=I_1+I_2$$

- $I_1=\int_{-1}^{1}2x^2dx=\left[\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{2\cdot 1^3}{3}-\frac{2(-1)^3}{3}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$
- $I_1=\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx=\frac{1}{2}\int_{2}^{2}\ln u\,du=0$

$$u=x^2+1$$
$$du=2xdx$$
$$\frac{1}{2}du=xdx$$

- Για $x=-1$ είναι $u=1+1=2$
- Για $x=1$ είναι $u=1+1=2$

Για $I=\frac{4}{3}+0=\frac{4}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Αφού η συνάρτηση $\frac{t}{f(t)-t}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο R (πράξεις μεταξύ των συνεχών f(t), t) ισχύει ότι η συνάρτηση $\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $\left(\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt\right)' = \frac{x}{f(x)-x}$

Άρα και η συνάρτηση $f(x) = x+3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως άθροισμα των παραγωγίσιμων $x+3$, $\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$ και ισχύει

$$f'(x) = (x+3)'+\left(\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt\right)' = 1+\frac{x}{f(x)-x} =$$
$$= \frac{f(x)-\cancel{x}+\cancel{x}}{f(x)-x} = \frac{f(x)}{f(x)-x} \ , \quad x\in R$$

Δ2 Η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R (άρα συνεχής) ως πράξεις μεταξύ των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f(x), 2x και ισχύει

$$g'(x) = 2f(x)f'(x)-\left(2f(x)+2xf'(x)\right) =$$
$$= 2f(x)f'(x)-2f(x)-2xf'(x) =$$
$$= 2f'(x)\left(f(x)-x\right)-2f(x) = 2\cdot\frac{f(x)}{f(x)-x}\left(f(x)-x\right)-2f(x) =$$
$$= 2f(x)-2f(x) = 0 \ , \text{ για κάθε } x\in R$$

Άρα g(x)=c, για κάθε $x\in R$

Δ3 Από τη σχέση $f(x)-x = 3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$, $x\in R$

έχω για x=0 ότι f(0)=3

Αφού g(x)=c , $x\in R$

είναι $f^2(x)-2xf(x) = c$, $x\in R$
άρα $f^2(0) = c \Leftrightarrow c = 9$

Άρα $f^2(x)-2xf(x)=9 \Leftrightarrow$

$$f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+9 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)-x\right)^2=x^2+9 \Leftrightarrow$$

$$\left|f(x)-x\right|^2=\sqrt{x^2+9}^{\,2} \Leftrightarrow$$

$$\left|f(x)-x\right|=\sqrt{x^2+9} \quad , \quad x\in R$$

Για τη συνάρτηση K(x)=f(x)-x ισχύει $K(x)\neq 0$, $\forall x\in R$ (αφού $f(x)\neq x$) κι αφού K συνεχής στο R (διαφορά των συνεχών f(x),x) , ισχύει ότι η K διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R. Είναι $K(0)=f(0)=3>0$, άρα $K(x)>0$, $\forall x\in R$

άρα $f(x)-x>0$, $\forall x\in R$

Επομένως $\quad f(x)-x=\sqrt{x^2+9}$, $x\in R$

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+9} \quad , \quad x\in R$$

Δ4 Για κάθε $x\in R$ θεωρώ τη συνάρτηση

$$h(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt=\int_x^{o}f(t)dt+\int_o^{x+1}f(t)dt=$$

$$=-\int_o^{x}f(t)dt+\int_0^{x+1}f(t)dt \quad , \quad x\in R$$

Αφού η συνάρτηση f(t) είναι συνεχής στο R ισχύει ότι η συνάρτηση $\int_o^{x}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και η συνάρτηση $\int_o^{x+1}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $\int_o^{x}f(t)dt$, x+1 άρα και η h(x) είναι παραγωγίσιμη στο R με $h'(x)=-\left(\int_o^{x}f(t)dt\right)'+\left(\int_o^{x+1}f(t)dt\right)'=$

$$=-f(x)+f(x+1)\cdot(x+1)'=f(x+1)-f(x) \quad , \quad x\in R.$$

Η $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x)=(x)'+\left(\sqrt{x^2+9}\right)'=1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}\cdot\left(x^2+9\right)'=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{x^2+9}>0 \quad , \quad \forall x\in R$$

αφού για κάθε $x\in R$ ισχύει $\sqrt{x^2+9}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x$

άρα $\sqrt{x^2+9}+x>0$, άρα $f\nearrow$ στο R

Για κάθε $x\in R$ ισχύει $x<x+1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$$f(x)<f(x+1)\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)>0\Leftrightarrow h'(x)>0$$

Για κάθε $x \in R$ ορίζω το διάστημα [x , x+1] στο οποίο η συνάρτηση h(x) είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής), άρα από Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = \frac{h(x+1)-h(x)}{(\cancel{x}+1)-\cancel{x}} = \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt - \int_{x}^{x+1} f(t)dt \quad \text{όπου } h'(\xi)>0 \Leftrightarrow \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt - \int_{x}^{x+1} f(t)dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt > \int_{x}^{x+1} f(t)dt$$

β' τρόπος

Θεωρώ τη συνάρτηση $\Phi(x) = \int_{o}^{x} f(t)dt \;,\; x \in R$.

Αφού η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής στο R, ισχύει ότι η Φ(x) είναι παραγωγίσιμη στο R με Φ′(x)=f(x).

Για κάθε $x \in R$ θεωρώ τα διαστήματα $[x, x+1], [x+1, x+2]$ στα οποία η συνάρτηση Φ(x) είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής), άρα εφαρμόζεται για την Φ(x) το Θ.Μ.Τ σε καθένα από τα διαστήματα $[x, x+1], [x+1, x+2]$, επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in (x, x+1)$ και $\xi_2 \in (x+1, x+2)$ ώστε

- $\Phi'(\xi_1) = \dfrac{\Phi(x+1)-\Phi(x)}{(x+1)-x} = \int_{o}^{x+1} f(t)dt - \int_{o}^{x} f(t)dt \Leftrightarrow$

  $f(\xi_1) = \int_{x}^{x+1} f(t)dt$

- $\Phi'(\xi_2) = \dfrac{\Phi(x+2)-\Phi(x+1)}{(x+2)-(x+1)} = \int_{o}^{x+2} f(t)dt - \int_{o}^{x+1} f(t)dt \Leftrightarrow$

  $f(\xi_2) = \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$

Η $f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x) = (x)' + \left(\sqrt{x^2+9}\right)' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+9}} \cdot \left(x^2+9\right)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{x^2+9} > 0 \;,\; \forall\, x \in R$$

αφού για κάθε $x \in R$ ισχύει $\sqrt{x^2+9} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$

άρα $\sqrt{x^2+9} + x > 0$, άρα $f \nearrow$ στο R

Αφού $x < \xi_1 < x+1 < \xi_2 < x+2$ και $f \nearrow$ ισχύει

$$f(\xi_1) < f(\xi_2) \Leftrightarrow \int_{x}^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)(dt)$$

γ’ τρόπος

Έχουμε $f \nearrow$ στο R

Για $x < t < x+1 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(t) < f(x+1) \Rightarrow$

$$\int_{x}^{x+1} f(t)dt < \int_{x}^{x+1} f(x+1)dt \Rightarrow \int_{x}^{x+1} f(t)dt < f(x+1) \quad (1)$$

Για $x+1 < t < x+2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x+1) < f(t) \Rightarrow$

$$\int_{x+1}^{x+2} f(x+1)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt \Rightarrow f(x+1) < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt \quad (2)$$

Από (1) , (2) έχουμε ότι: $\int_{x}^{x+1} f(t)dt < f(x+1) < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$

Άρα $\int_{x}^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ