ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ κ' ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
24 Μαΐου 2007-05-24

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

Α.1 Ο.Ε.Δ.Β. σελ. 98
Α.2 Ο.Ε.Δ.Β σελ. 141
Α.3 Ο.Ε.Δ.Β σελ. 280

Β
α → Λ
β → Λ
γ → Λ
δ → Σ
ε → Σ

ΘΕΜΑ 2°

α) $$|z| = \left|\frac{2+\alpha i}{\alpha+2i}\right| = \frac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|} = \frac{\sqrt{2^2+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+2^2}} = 1$$

Άρα η εικόνα του z ανήκει στο κύκλο με Κ(0,0) και ακτίνα ρ=1.

β) Για α=0 $z_1 = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i$

Για α=2 $z_2 = \frac{2+2i}{2+2i} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } |z_2 - z_1| = |1+i| = \sqrt{2} \\ \text{ii) } (z_1)^{2\nu} = (-i)^{2\nu} = (-1)^{\nu} \\ (-z_2)^{\nu} = (-1)^{\nu} \end{array}\right\} \text{οπότε } (z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{\nu}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Η f είναι ορισμένη κ' δύο φορές παραγωγίσιμη στο R (άρα συνεχής) με $f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f′	+	0	-	0	+
f	↗	Τ.Μ f(-1)	↘	Τ.Ε f(1)	↗

Η f παρουσιάζει στο x=-1 τ. μέγιστο με τιμή $f(-1)=-1+3-2\eta\mu^2\theta=2\sigma\upsilon\nu^2\theta>0$, $\theta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$

Η f παρουσιάζει στο x=1 τ. ελάχιστο με τιμή $f(1)=1-3-2\eta\mu^2\theta=-2(1+\eta\mu^2\theta)<0$.

$f''(x)=6x$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f″	-	0	+
f	∩	Σ.Κ f(0)	∪

Η f παρουσιάζει στο x=0 σημείο καμπής.

β) Στο $A_1=(-\infty,-1]$ η f είναι συνεχής κ' ↗ οπότε έχει σύνολο τιμών

$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(-1)\right]=\left(-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right]$ με $\sigma\upsilon\nu^2\theta>0$ αφού $\theta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$.

Αφού $0\in f(A_1)$ υπάρχει μοναδική ρίζα ρ_1 της εξίσωσης f(x)=0 στο $(-\infty,-1)$.

Στο $A_2=[-1,1]$ η f είναι συνεχής κ' ↘ οπότε έχει σύνολο τιμών

$f(A_2)=[f(1),f(-1)]=\left[-2(1+\eta\mu^2\theta), 2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right]$ με $-2(1+\eta\mu^2\theta)<0$ κ' $2\sigma\upsilon\nu^2\theta>0$

Αφού $0 \in f(A_2)$ υπάρχει μοναδική ρίζα ρ_2 της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(-1,1)$.
Στο $A_3=[1,+\infty)$ η f είναι συνεχής κ' $\nearrow$ οπότε έχει σύνολο τιμών
$f(A_3)=\left[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty}\right]=\left[-2(1+\eta\mu^2\theta),+\infty\right)$.

Αφού $0 \in f(A_3)$ υπάρχει μοναδική ρίζα ρ_3 της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(1,+\infty)$.
Άρα η f έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3
με $\rho_1 < -1 < \rho_2 < 1 < \rho_3$.

γ) $A(-1,2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, $B(1, -2(1+\eta\mu^2\theta))$, $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$.
ε: $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$ **«1»**

Από **«1»** για $x=-1$ έχουμε $y=2-2\eta\mu^2\theta=2\sigma\upsilon\nu^2\theta$
Άρα το Α ανήκει στην (ε).

Από **«1»** για $x=1$ έχουμε $y=-2-2\eta\mu^2\theta=-2(1+\eta\mu^2\theta)$
Άρα το Β ανήκει στην (ε)

Από **«1»** για $x=0$ έχουμε $y=-2\eta\mu^2\theta$
Άρα το Γ ανήκει στην (ε).

δ) Έστω $\Delta(x)=f(x)-g(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta+2x+2\eta\mu^2\theta=x^3-x$.
$\Delta(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$ ή $x=1$

x	-1		0		1
x		$-$	0	$+$	
x^2-1		$-$		$-$	
$\Delta(x)$		$+$		$-$	

$\Delta(x)$ συνεχής στο $[-1,1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$E=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-x)dx=\ldots=\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 4°

α) f συνεχής $f\nearrow$ $[0,1]$ κ′ $f(0)>0$

$g(x)>0 \qquad \forall x\in[0,1]$

$\forall\in(0,1]\Rightarrow f(x)>f(o)>0$ αφού $f\nearrow$

$\forall t\in[0,x]$ είναι $g(t)\cdot f(t)>0$

Άρα $\int_0^x g(t)\cdot f(t)dt>0$.

β) g συνεχής στο $[0,1]$ ισχύει $G(x)=\int_0^x g(t)dt$

είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $G'(x)=g(x)$.

Έστω $h(x)=f(x)\cdot G(x)-F(x)=$

$$=f(x)\cdot\int_0^x g(t)dt-\int_0^x f(t)g(t)dt=\int_0^x (f(x)g(t)-f(t)g(t))dt=\int_0^x g(t)(f(x)-f(t))dt$$

Για κάθε $x\in(0,1]$ ορίζεται το $[0,x]\subseteq[0,1]$

Για κάθε $t\in[0,x]$ έχουμε: $0\le t\le x \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(t)\le f(x)$ οπότε $f(x)-f(t)\ge 0$

κ′ $g(t)>0$

Άρα $g(t)\,(f(x)-f(t))\ge 0$ $\forall t\in[0,x]$ όπου το "=" ισχύει **μόνο** όταν $x=t$.

Άρα $\int_0^x g(t)\big(f(x)-f(t)\big)dt>0$ οπότε αποδείχθηκε ότι $f(x)\cdot G(x)>F(x)$

γ) Θεωρώ συνάρτηση $H(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$

$H(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0,1]$, αφού F,G παραγωγίσιμες

$$H'(x)=\frac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}=\frac{f(x)\cdot g(x)G(x)-g(x)\cdot F(x)}{G^2(x)}$$

$$=\frac{g(x)(f(x)G(x)-F(x))>0}{G^2(x)}>0 \qquad \forall x\in(0,1],\ \text{από }(\beta)\quad f(x)G(x)-F(x)>0$$

κ′ $g(x)>0$ $\forall x\in(0,1]$, $G^2(x)>0$ $\quad\forall x\in(0,1]$.

Άρα $H\nearrow$ στο $(0,1]$

Άρα για κάθε $x \in (0,1]$ έχουμε: $0 < x \leq 1 \Rightarrow H(x) \leq H(1) \Rightarrow \frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$

δ) Έστω $K(x) = \dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt \cdot \int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt}{\left(\int_0^x g(t)dt\right) \cdot x^5} = \dfrac{F(x) \cdot \int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt}{G(x) \cdot x^5} = \dfrac{F(x)}{G(x)} \cdot \dfrac{\int_0^{x^2} \eta\mu^2 dt}{x^5}$

Η συνάρτηση $\int_0^{x^2} \eta\mu^2 dt$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$

οπότε $\lim\limits_{x \to 0^+} \int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt = \int_0^0 \eta\mu t^2 dt = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^5 = 0$

Οπότε:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt}{x^5} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)'}{(x^5)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\eta\mu x^4 \cdot 2x}{5x^4} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{5} \cdot \frac{\eta\mu x^4}{x^4} = \frac{2}{5} \cdot \lim_{x \to 0^+} x \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{\eta\mu x^4}{x^4} = \frac{2}{5} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = F(0) = 0$ (F συνεχής ως παραγωγίσιμη).

$\lim\limits_{x \to 0^+} G(x) = G(0) = 0$ (G συνεχής ως παραγωγίσιμη).

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(F(x))'}{(G(x))'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) \cdot \cancel{g(x)}}{\cancel{g(x)}} = f(0)$$

Οπότε: $\lim\limits_{x \to 0^+} K(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{F(x)}{G(x)} \cdot \dfrac{\int_0^{x^2} \eta\mu^2 dt}{x^5} = f(0) \cdot 0 = 0.$